

1976 DEC 16

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

ITERÁCIÓS MÓDSZEREK LINEÁRIS RENDSZEREKRE

Írta:
BÁN ILONA

Tanulmányok 56/1976.

A kiadásért felelős:

DR Vámos Tibor

ISBN 963 311 030 0

TARTALOMJEGYZÉK

<u>BEVEZETÉS</u>	5
1. <u>ALAPFOGALMAK</u>	7
2. <u>MÁTRIX ELMÉLETI ALAPFOGALMAK</u>	8
3. <u>LINEÁRIS STACIONÁRIS ITERATIV MÓDSZREK</u>	18
1. Jacobi módszer	18
2. Gauss-Seidel módszer	19
3. JOR módszer	22
4/a. SOR módszer	23
4/b. Komplex SOR módszer	33
5. MSOR módszer	38
6. SSOR módszer	41
7. USSOR módszer	43
8. PR módszer	45
4. <u>NEMSTACIONÁRIS LINEÁRIS ITERATIV MÓDSZEREK</u>	48
1. J-SI módszer	53
2. JOR-SI módszer	53
3. RF-SI módszer	54
4. Richardson módszer	55
5. CCSI módszer	56
6. GSSI módszer	57
7. GS-SSI módszer	58
8. SOR-SI módszer	58
9. MSOR-SI módszer	58
10. SSOR-SI módszer	59
5. <u>MÁSODFOKU ITERATIV MÓDSZEREK</u>	60
6. <u>BLOKKITERATIV MÓDSZEREK</u>	66
I. 1. Jacobi blokkiterációs módszer	67
2. Gauss-Seidel blokkiterációs módszer	67
3. JOR és SOR blokkiterációs módszer	68
II. Konvergenciaanalízis	72
III. A pont és a blokkiterativ módszerek összehasonlítása	75



7. <u>AZ ITERATIV MÓDSZREK KIVÁLASZTÁSA</u>	76
8. <u>PÉLDA</u>	79
<u>IRODALOMJEGYZÉK</u>	84

Jelen dolgozat az 5.9.1 sz.
intézeti téma keretében ke-
rült kidolgozásra

BEVEZETÉS

Az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetében a Dr. Benedikt Ottó akadémikus irányításával dolgozó kutatócsoport az erősen telített bonyolult geometriájú mágneses körök és terek vizsgálatával foglalkozik.

A valóság megfelelő pontossággal történő leírásánál alapvetően két utat követhetünk: mágneses körök vizsgálata nomografikus módszerrel, illetve bizonyos térrészekben létrejövő pontos eloszlások vizsgálata térszámitási módszerekkel.

Ugy a nomografikus módszer továbbfejlesztése során, mint a számítógépes téranalízis esetén szembetalálkozunk a lineáris egyenletrendszerek megoldásának problémájával. Ezen egyenletrendszereknek megoldása történhet direkt és iteratív uton.

Az 1950-es évek elején elterjedt az a nézet, hogy a direkt módszerek nagy komputerekre nem alkalmasak és iteratív módszerrel kell helyettesíteni. Azóta a direkt módszereken több javítást végeztek és kis és közepes méretű problémákra továbbra is jól alkalmazhatók. Azonban nagyon nagy rendszereknél sparse azaz ritka mátrix esetén általában iteratív módszereket használnak. Ennek egyik oka, hogy a direkt módszer a belső memóriát jobban terheli, így a legnagyobb számítógépeknél is memória problémák merülhetnek fel, amik iterációs módszer alkalmazásával elkerülhetők. Másrészt nagy és ritka mátrix esetén a számítási munkaigényesség az iterációs módszernél kisebb. A nagy és gyors számítógépek lehetővé tették azt is, hogy pontos numerikus megoldásokat kapjunk olyan fizikai és matematikai problémákra, amelyek - bár ismertek voltak algoritmusok a kezelésükre előzőleg is - a gyakorlatban mégsem voltak használhatók, mert nagyon nagy volt a megoldáshoz szükséges műveletek száma. Ilyen probléma a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásánál fellépő sparse mátrixu nagy egyenletrendszerek megoldása. Ilyen egyenletekkel írják le pl. az elektromágneses tereken ki-

vül a neutrontdiffúziót, folyadékáramlást, ellaszticitást, stabil állapotú hőáramlást, időjáráselőrejelzést.

Ebben a tanulmányban az

$$A u = b$$

/1/

lineáris egyenletrendszer iteratív módszerrel történő megoldásával foglalkozunk, ahol A adott, $N \times N$ -es valós mátrix, b adott, valós oszlopvektor. Az u ismeretlen oszlopvektort akarjuk meghatározni. Azokat a módszereket ismertetjük, amelyek nagy $|N| = 10^3 - 10^6$ és "sparse" A mátrix esetén használhatók.

A számítógépek elterjedése óta sok iterációs módszert dolgoztak ki. Young pl. az 1971-ben megjelent könyvében 14 elsőfajú lineáris stacionárius és 10 nemstacionárius módszert mutat be.

Ebben a tanulmányban Young terminológiáját követve a gyakrabban használt módszereket és az 1971 óta kidolgozott javításokat ismertetjük.

Köszönetet mondok dr. Gergely Józsefnek a Numerikus Módszerek Osztály vezetőjének a tanulmány megírásához adott hasznos tanácsaiért.

1. ALAPFOGALMAK

Egy /1/-et megoldó iteratív módszer $\phi_0(A,b)$, $\phi_1(u^{(0)}, A, b)$, $\phi_2(u^{(0)}, u^{(1)}, A, b) \dots$ függvényekkel definiálható.
Az $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ sorozat az

$$u^{(0)} = \phi_0(A, b)$$

$$u^{(n+1)} = \phi_{n+1}(u^{(0)}, \dots, u^{(n)}, A, b)$$

által vannak definiálva. Gyakran $s \geq 0$ -ra $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(s)}$ tetszőlegesen választható, azaz $\phi_0, \phi_1 \dots \phi_s$ tetszőleges függvénye A-nak és b-nek. Ha $s > 0$ egészre igaz, hogy ϕ_n független n-től minden $n \geq s$, akkor a módszert stacionárisnak mondjuk. Egyébként nemstacionárisnak.

Pl $s=1$ azt jelenti, hogy az iterációs módszer

$$u^{(0)} = \phi_0(A, b)$$

$$u^{(n+1)} = \phi(u^{(n)}, A, b)$$

alakban írható.

Ha minden n-re ϕ_n az $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}$ -nek lineáris függvénye, akkor a módszert lineárisnak nevezzük. Egyébként nemlineárisnak.

A lineáris stacionáris iteratív módszert elsőfajúnak nevezzük, ha

$$u^{(n+1)} = G u^{(n)} + k \quad /1.1/$$

alakú, ahol G mátrix és k oszlopvektor.

Az /1.1/ módszer tanulmányozása helyett gyakran vizsgáljuk az

$$(I - G)u = k \quad /1.2/$$

un. kapcsolt rendszert.

/1/, ill. /1.2/ megoldásainak halmazát $H/A, b/$ -vel ill. $H/I-G, k/$ -val jelöljük. Ha A nemszinguláris, akkor létezik /1/ -nek egyetlen \bar{u} megoldása, amit $\bar{u} = A^{-1} b$ ad meg. Az /1.1/ által definiált iteratív módszert az /1/ rendszerrel konzisztensnek nevezzük, ha $H/A, b/ \leq H/I-G, k/$, fordítottan konzisztensnek, ha $H/A, b/ \geq H/I-G, k/$ és teljesen konzisztensnek, ha $H/A, b/ = H/I-G, k/$.

A konzisztencia fogalma tehát az /1/ lineáris és az /1.1/ iterációs egyenlet megoldásainak halmazát kapcsolja össze anélkül, hogy a lineáris stacionáris módszerek közül bármelyiket konkrétan vizsgálná. Így néhány általános tétel kimondása vált lehetővé, mely a lineáris stacionáris módszerek egész osztályára vonatkozik.

T é t e l :

Ha /1/ megoldható, akkor az /1.1/ módszer akkor és csak akkor konzisztens /1/-el, ha valamely M mátrixra

$$G = I - MA, \quad k = Mb \quad /1.3/$$

Az (1.1) módszer akkor és csak akkor teljesen konzisztens (1)-el, ha (1.3) teljesül és M nemszinguláris mátrix. Ha A nemszinguláris, akkor az (1.1) akkor és csak akkor konzisztens (1)-el, ha

$$k = /I-G/A^{-1}b, \quad /1.4/$$

és teljesen konzisztens, ha (1.4) igaz és $I-G$ nemszinguláris. Ha $I-G$ nemszinguláris, akkor az (1.1) módszer akkor és csak akkor fordítottan konzisztens (1)-el, ha

$$b = A/I-G/^{-1}k \quad /1.5/$$

A módszer teljesen konzisztens, ha (1.5) igaz és A nemszinguláris.

Az iterációs módszernél egy másik nagyon fontos kérdés az iterációval kapott sorozat viselkedése.

D e f i n i c i ó:

Az (1.1) módszert gyengén konvergensnek nevezzük, ha bármely $u^{(0)}$ kezdővektor esetén az $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ sorozat konvergál. A módszer konvergens, ha gyengén konvergens és a sorozat határértéke $u^{(0)}$ -tól független.

Minden (1.1) alaku iteratív módszerre igaz a következő tétel:

T é t e l :

A (1.1) iteratív módszer akkor is csak akkor konvergens, ha

$$S/G/ < 1$$

és akkor és csak akkor gyengén konvergens, ha

$$S/G/ \leq 1.$$

Itt $S/G/$ a G mátrix spektrál rádiuszát jelöli azaz $S/G/ = \max_{\lambda \in S_G} |\lambda|$ ahol S_G G összes sajátértékének halmaza.

Ha

- (a) A nemszinguláris és (1)-nek egyetlen megoldása van és
- (b) $S/G/ < 1$, és
- (c) $k = /I-G/A^{-1}b$, akkor a (1.1) iterációs módszer teljesen konzisztens (1)-el, és tetszőleges $u^{(0)}$ kezdővektorra az $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ sorozat (1) egyetlen megoldásához konvergál.

2. MÁTRIX ELMÉLETI ALAPFOGALMAK

Ebben a fejezetben azokat a mátrix elméleti alapfogalmakat ismertetjük, amelyek előfordulnak a következő fejezetekben, ahol az iteratív módszereket vizsgáljuk.

D e f i n i c i ó:

Ha az A mátrix minden eleme valós és nem negatív /pozitív/, akkor a mátrixot nemnegativnak /pozitivnak/ nevezzük.

Jelölése $A \geq 0$ / $A > 0$ /.

D e f i n i c i ó:

Vektor normáján /tetszőleges $v \in E^N$ -re jelöljük ezt a függvényt $\|v\|$ -vel/ olyan valós értékű függvényt értünk, amely az összes vektorok E^N halmazán van értelmezve és amelytől megköveteljük, hogy teljesüljenek rá a következő tulajdonságok:

$$/1/ \quad \|v\| > 0 \quad \text{ha } v \neq 0 \quad \text{és} \quad \|v\| = 0, \quad \text{ha } v = 0$$

$$/2/ \quad \|cv\| = |c| \|v\| \quad \text{tetszőleges } c \text{ komplex számra}$$

$$/3/ \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

A definíció nem egyértelmű abban az értelemben, hogy nem egyetlen függvény tesz eleget a követelményeknek. Közülük a leghasználatosabbak a

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Euklidesi norma}$$

$$\|v\|_\infty = \max_i |v_i| \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |v_i|$$

Hasonló követelmények vannak mátrixok normájára is, amelyeket a vektornormák tulajdonságaiból lehet levezetni. /Az azonos indexű vektor és mátrix normák kompatibilisek abban az értelemben, hogy egyiket a másiktól lehet származtatni./

Példák mátrix normákra:

$$||A||_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$||A||_2 = [S(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

$$||A||_M = N \max_{i,j} |a_{ij}| \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$||A||_T = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||A||_* = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$$

A továbbiakban mi a következő mátrix normát használjuk:

$$||B||_A = ||A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}|| \quad \text{ahol } A \text{ és } B \text{ tetszőleges } \neq 0 \text{ mátrixok.}$$

Az A normája és az $S(A)$ spektrál rádiusz között az $||A|| \geq S(A)$ egyenlőtlenség érvényes bármely A komplex mátrixra.

Definíció:

$A = (a_{i,j})$ mátrix transzponáltjának az $A^T = (a_{j,i})$ konjugált transzponáltjának pedig az $A^H = (a_{j,i}^*)$ mátrixot nevezzük, ahol a $*$ a mátrix elem komplex konjugáltját jelöli.

Definíció:

Hasonlónak mondjuk az A és B N -ed rendű mátrixokat, ha $B = P^{-1}AP$ teljesül valamilyen P nonsinguláris mátrixra. Hasonló mátrixoknak ugyanakkora a rangja.

Definíció:

Legyen az A négyzetes mátrix. Ha létezik olyan B négyzetes mátrix, hogy $AB = I$ vagy $BA = I$, akkor az A mátrixot nonszingulárisnak nevezzük. Egyébként szingulárisnak. B -t az A inverzének nevezzük.

Tétel:

Az A mátrix akkor és csak akkor nonszinguláris, ha $\det A \neq 0$. Akkor és csak akkor létezik olyan $u \neq 0$ vektor, hogy $Au = 0$ ha az A szinguláris. Az $Au = b$ lineáris rendszernek akkor és csak akkor van egyetlen megoldása, ha A nonszinguláris. Ha A szinguláris, akkor vagy egyetlen megoldás sincs, vagy végtelen sok van.

Definíció:

Ha $A = A^T$, akkor A -t szimmetrikusnak, ha $A = A^H$, akkor Hermitikusnak, ha A valós és $AA^T = I$, akkor ortogonálisnak, ha $AA^H = I$, akkor unitérnek, és ha $AA^H = A^H A$ akkor normálisnak nevezzük.

Tétel:

Ha A Hermitikus, akkor $\|A\|_* = S(A)$.

Tetszőleges $A = \|a_{i,j}\|$ komplex mátrixra $S(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

Definíció:

$v = \|v_1, v_2, \dots, v_N\|^T$ és $w = \|w_1, w_2, \dots, w_N\|^T$ két vektor belső szorzata a

$$\langle v, w \rangle = v^H w = \sum_{i=1}^N v_i^* w_i \quad \text{összeg.}$$

Tétel:

Az A akkor és csak akkor Hermitikus mátrix, ha $\langle v, Av \rangle$ valós minden v -re.

D e f i n i c i ó :

Az A mátrix pozitív definit, ha A Hermitikus és $\langle v, Av \rangle > 0$

Minden $v \neq 0$ -ra. Ha $\langle v, Av \rangle \geq 0$ minden v -re, akkor A nemnegatív definit.

T é t e l:

Az A mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha Hermitikus és minden saját értéke pozitív.

D e f i n i c i ó :

$P = \|p_{i,j}\|$ permutáció mátrix olyan mátrix, amelynek minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-es áll, a többi eleme nulla.

D e f i n i c i ó :

Az A mátrix irreducibilis, ha nem létezik olyan P permutáció mátrix, hogy $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} F & 0 \\ G & H \end{pmatrix}$ alakú, ahol F és H négyzetes mátrix és 0 minden eleme nulla.

D e f i n i c i ó :

Gyengén diagonál domináns sorai szerint az N -ed rendű A mátrix, ha

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N |a_{i,j}| \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (x)$$

és legalább egy i -re

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N |a_{i,j}|$$

Szigorúan diagonál domináns az A komplex mátrix, ha $|x|$ -nél szigorú egyenlőtlenség van minden i -re.

Általánosan diagonál domináns egy A komplex mátrix, ha oszlopait /sorait/ nem 0 tényezővel beszorozva soraira /osz-

lopaira/ nézve szigoruan diagonáldomináns mátrixot kapunk.

T é t e l :

Legyen $A = I - /L+L^T/$ irreducibilis $n \times n$ -es mátrix és L nem negatív. Ha az A pozitív definit, akkor A általánosan diagonál domináns. (Biz. ld.9.)

D

D e f i n i c i ó :

Az A N -ed rendű mátrixot "A tulajdonságúnak" nevezzük, ha létezik az első N pozitív egész szám W halmazának két olyan diszjunkt S_1 és S_2 részhalmaza, hogy $S_1 + S_2 = W$ és $i \neq j$ esetén ha vagy $a_{i,j} \neq 0$, vagy $a_{j,i} \neq 0$, akkor $i \in S_1$ és $j \in S_2$, vagy $i \in S_2$ és $j \in S_1$, azaz az indexek különböző halmazba esnek, ha $a_{i,j}$ és $a_{j,i}$ közül legalább az egyik nem nulla.

D e f i n i c i ó :

Az N -ed rendű valós mátrixot "L-mátrixnak" nevezzük, ha

$$a_{i,j} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{és}$$

$$a_{i,j} \leq 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (*)$$

T é t e l :

Legyen $A = D - B$ szimmetrikus irreducibilis "L-mátrix". Az A akkor és csak akkor pozitív definit, ha A általánosan diagonál domináns. (Bizonyítást ld.(9)).

Az A valós mátrixot Stieltjes mátrixnak nevezzük, ha pozitív definit és $(*)$ teljesül.

A -t "M-mátrixnak" nevezzük, ha $(*)$ teljesül, A nonszinguláris és $A^{-1} \geq 0$.

T é t e l e k :

Ha az A "L mátrix", szimmetrikus, irreducibilis és gyengén diagonál domináns, akkor A Stieltjes mátrix.

Ha az A "L mátrix", akkor A akkor és csak akkor "M mátrix" is, ha $S/B < 1$, ahol $B = D^{-1}C$, $D = \text{diag } A$, $A = D-C$.

Ha az A Stieltjes mátrix, akkor az A "M mátrix".

Ha az A valós szimmetrikus, nemnegatív N -ed rendű mátrix, akkor

- (a) S/A az A egy sajátértéke és létezik A -nak egy v sajátvektora, amely a S/A -hoz tartozik és $v \geq 0$.
- (b) Ha az A irreducibilis, akkor S/A az A -nak egyszeres sajátértéke és létezik egy S/A -hoz tartozó pozitív sajátvektor. Továbbá $S/A > 0$ kivéve $N = 1$ és $A = 0$ eseteket.
- (c) Ha az A irreducibilis és $-S/A$ A -nak sajátértéke, akkor A "A tulajdonságu" és A diagonál elemei eltűnnek. $-S/A$ az A -nak egyszeres sajátértéke.

MEGJEGYZÉS

Általában elliptikus differenciál egyenletek diszkretizálása során nyert egyenletrendszerek "A tulajdonságuak". Két, általános Dirichlet probléma 5 pontos sémával való diszkretizálása során nyert egyenletrendszert vizsgálunk. A parciális differenciálegyenlet:

$$L[u] = A u_{xx} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

R korlátos tartományon.

Itt az A, D, C, E, F és G analitikus függvények, amelyek x -től és y -től függetlenek R -en és kielégítik az $A \geq m$, $C \geq m$ egyenlőtlenségeket, valamely m pozitív konstansra és $F \leq 0$. Az u függvénynek ki kell elégíteni az $u|_{\partial R} = g|_{\partial R}$ peremfeltételt az R S határán. Ha 5 pontos differencia sémát használunk és az R tartományt R_h h távolságu négyzetráccsal fedjük be, akkor a következő típusu egyenletet kapjuk R_h egy belső pontjában:

$$a_0 u/x, y/ - a_1 u/x+h, y/ - a_2 u/x, y+h/ - a_3 u/x-h, y/ - \\ - a_4 u/x, y-h/ = t/x, y/, \text{ ahol}$$

$$a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - h^2 F = 2/A+C - \frac{1}{2}h^2 F/$$

$$a_1 = A + \frac{1}{2}h D \quad a_2 = C + \frac{1}{2}h E$$

$$a_3 = A - \frac{1}{2}h D \quad a_4 = C - \frac{1}{2}h E \quad t = -h^2 G$$

Nevezzük ezt a feladatot I-es variánsnak.

Tekintsük most a

$L/u/ = /A u_x/_x + /C u_y/_y + F u = 0$ önadjungált differenci-
álegyenletet, ahol $A \geq m > 0$, $C \geq m > 0$ és $F \leq 0$ R-en.

/Ez az előzőből származik $A_x = D$, $C_y = E$ választás mel-
lett./

Ezt diszkretizálva az

$$a_0 u/x, y/ - a_1 u/x+h, y/ - a_2 u/x, y+h/ - a_3 u/x-h, y/ - \\ - a_4 u/x, y-h/ = t/x, y/ \text{ egyenletet kapjuk, ahol}$$

$$a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - h^2 F$$

$$a_1 = A/x+\frac{1}{2}h, y/ \quad a_2 = C/x, y+\frac{1}{2}h/$$

$$a_3 = A/x-\frac{1}{2}h, y/ \quad a_4 = C/x, y-\frac{1}{2}h/ \quad t = -h^2 G$$

Ezt II. variánsnak nevezzük.

A következő tulajdonságaik a variánsok:

- (a) Az I. és a II. variánsban is $a_{i,i} > 0$
 $i = 1, 2, \dots, N$. Sőt az I. variánsnál elég kis
h-ra és a II. variánsra igaz, hogy A egy
"L mátrix".
- (b) Az I.-re elég kis h esetén és a II-re igaz,
hogy az $A u - b$ rendszert egy vagy több füg-
getlen alrendszerre lehet bontani, amelyek
mindegyike irreducibilis mátrix.

- (c) Az I.-re elég kis h esetén és a II.-re igaz, hogy A gyengén diagonál domináns.
- (d) A II. variánsra igaz, hogy A szimmetrikus.
- (e) Az I. és a II. variánsra igaz, hogy A "A tulajdonságu".

3. LINEÁRIS STACIONÁRIS ITERATIV MÓDSZEREK

Mivel a stacionáris iteratív módszerek számítástechnikailag kényelmesebbek, könnyen kezelhetők, általában ezeket használják. A nemstacionáris módszerek bonyolultabbak, számítógépre nehezen alkalmazhatók, viszont az ilyen eljárások konvergenciája gyorsabb és biztosabb. Most néhány lineáris stacionáris iteratív módszert ismertetünk.

Írjuk a A mátrixot $A = D+E+V$ alakba, ahol D diagonális mátrix, E és V pedig alsó, illetve felső háromszög mátrixok.

1. Jacobi módszer

A Jacobi $/J/$ vagy más néven az egyidejű változtatás módszerét tetszőleges $u^{(0)}$ kezdővektorból kiindulva az $u^{/n+1/} = B u^{/n/} + C$ iterációs sémával írhatjuk le, ahol $B = -D^{-1}/E+V/$ és $C = D^{-1}b$.

Ha $||B|| \leq \alpha < 1$, akkor az iteráció tetszőleges $u^{/0/}$ kezdeti vektor esetén konvergens és határértéke az $/1/$ egyenlet pontos megoldása. Ugyanis az

$$u = B u + C \quad \text{és}$$

$$u^{/n+1/} - u = B /u^{/n/} - u/ = B^2 /u^{/n-1/} - u/ = \dots$$

$$\dots = B^{/n-1/} /u^{/0/} - u/$$

Ebből következik, hogy az $\{u^{/n/}\}$ vektorsorozat akkor és csak akkor konvergál a pontos megoldáshoz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B^{/n+1/} y = 0 \quad \text{minden } y \text{ vektorra. Ez pedig teljesül,}$$

$$\text{ha } ||B|| \leq \alpha < 1$$

A Jacobi módszer teljesen konzisztens ha A és $I-B$ nonszinguláris.

Igaz az alábbi tétel:

Ha A valós, szimmetrikus, pozitív definit, nonszingu-

lárís, pozitív diagonál elemű mátrix, akkor a, J módszer, akkor és csak akkor konvergens, ha A és $2.D-A$ pozitív definit.

A Jacobi módszert ritkán alkalmazzák /1/ megoldásra. Ennek az az oka, hogy az alább tárgyalandó Gauss-Seidel eljárás /GS/ csaknem minden olyan esetben konvergál, mint a Jacobi, viszont konvergálhat olyan esetben, amikor a J módszer divergál. A GS módszer általában gyorsabb a J-nél.

2. Gauss-Seidel módszer

A Gauss-Seidel /GS/ és a J módszer között az a különbség, hogy a GS-nél mihelyt kiszámoltuk az $u^{(n)}$ vektor egy újabb komponensét, azt azonnal fel is használjuk a következő iterációnál. Az iterációs séma:

$u^{(n+1)} = L u^{(n+1)} + U u^{(n)} + C$, ahol L és U a B alsó, illetve felső /0 diagonálisu/ háromszög mátrixai. Más alakba írva:

$$u^{(n+1)} = \mathcal{L} u^{(n)} + (I-L)^{-1}C, \text{ ahol } \mathcal{L} = (I-L)^{-1}U$$

Ha A nemszinguláris, akkor a GS módszer teljesen konvergens.

Mint az előzőekből tudjuk, a stacionáris iterációs eljárások konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy B összes saját értéke az egységkörön belül helyezkedjen el. Ennek a feltételnek a teljesülését elég nehéz ellenőrizni, de ha valamilyen speciális tulajdonságu a mátrix, akkor lényegesen könnyebben ellenőrizhető konvergencia kritériumok nyerhetők.

T é t e l :

Ha az A együtthatómátrix pozitív definit, szimmetrikus, akkor a GS iteráció a kezdeti érték vektortól függetlenül konvergens. /Bizonyítást lásd pl. Ralston/

Elég kidolgozott konvergencia szempontból az un. partícionált mátrixok problémaköre. Legyen $A = \|a_{i,j}\|$ $n \times n$ -es invertálható, komplex elemű mátrix. Tegyük fel, hogy P, L és R olyan $n \times n$ -es mátrixok, hogy $A = \|P+L\|+R$, ahol P pozitív definit $\|P>0\|$ és $P+L$ invertálható. Ha P diagonális /vagy blokkdiagonális/, L alsó, R pedig felső háromszögmátrix és P pozitív definit, a GS iteráció akkor és csak akkor konvergál, ha $\operatorname{Re} A$ pozitív definit.

1. Következmény: Legyen A blokkpartícionált, azaz $A = \|A_{i,j}\|_1^m$ ahol $A_{i,j}$ $(k_i \times k_j)$ -s mátrix minden $i, j = 1, 2, \dots, m$ -re.

Legyen $P = \operatorname{diag} \|A_{1,1}, \dots, A_{m,m}\|$, A blokkdiagonális része /minden $A_{i,i}$ négyzetes, $A_{i,i}$ és $A_{j,j}$ nem feltétlenül azonos dimenziójú/. Legyen $A = A^*$ /azaz $L = R^*$ / és P pozitív definit /mátrixok direkt összege/. A GS módszer akkor és csak akkor konvergens /azaz $\|(P+L)^{-1}L^*\|^k \rightarrow 0$ /, ha $A>0$.

2. Következmény: Legyen A nemnegatív diagonálu Hermite mátrix. A GS módszer akkor és csak akkor konvergens, ha $A>0$.

3. Következmény: Legyen A tetszőleges $n \times n$ -es mátrix, nem szükségképpen szimmetrikus.

$A = P + L + R$, $B = -(P+L)^{-1}R$, ahol P diagonál /vagy blokkdiagonál/ része az A -nak, L az A -val, R pedig a jobb oldali háromszög része. Tegyük fel, hogy P szimmetrikus és pozitív definit és

$$N = A + A^* - R^* (P+L)^{-1} + (P+L)^{-1} R +$$

$(P+L)^{-1} (R+R^*) (P+L)^{-1} R$ pozitív definit. A GS akkor és csak akkor konvergens, ha $C = A + A^*$ pozitív definit.

Legyen $A(2n \times 2n)$ -es partícionált mátrix $/A_{11}, A_{1,2}$ invertálható/ $A = /A_{1,j} /_1^2$ ahol minden almátrix $n \times n$ -es, és $A_{2,1} = -A_{1,2}^*$. Legyen $C = \text{diag} /A_{11}, A_{22} /$, és $A = F + C$, Ekkor F ferdén szimmetrikus. A lehet asszimmetrikus, mivel a C is lehet az. Vizsgáljuk a $B = -F^{-1} C$ mátrixon alapuló Seidel iterációt és tegyük fel, hogy

$\text{Re} A = \text{diag} (\frac{1}{2}/A_{11} + A_{11}^*/, \frac{1}{2}/A_{22} + A_{22}^*/)$ pozitív definit.

Az előző tétel szerint a B -n alapuló GS iteráció akkor és csak akkor konvergál, ha $M = \text{Re} A - B^* / \text{Re} A / B$ pozitív definit.

Itt $M = \text{diag} (\text{Re} A_{11} - R^* / \text{Re} A_{22} / R, \text{Re} A_{22} - S^* \text{Re} A_{11} S)$

ahol $R = A_{1,2}^{-1} A_{11}$, $S = A_{12}^{-1} A_{22}$

T é t e l :

$A B = - F^{-1} C$ $C = \text{diag} /A_{11}, A_{22} /$ -n alapuló GS iteráció $A X = /F+C/ X = Y$ -ra akkor és csak akkor konvergál, ha a $\text{Re} A_{11} - R^* \text{Re} A_{22} R$, $\text{Re} A_{22} - S^* \text{Re} A_{11} S$ mátrixok mindegyike pozitív definit.

Annak eldöntése, hogy a Jacobi vagy a Gauss-Seidel módszer jobb-e egy adott feladatra, nehéz probléma. Egyértelmű feleletet csak nemnegatív elemű mátrixok esetén adhatunk. A Stein-Rosenberg tétel szerint ilyen B mátrix esetén a J és a GS módszer egyszerre konvergál ill. divergál, és ha mindketten konvergensek, akkor a GS konvergál gyorsabban.

Nemnegatív elemű mátrixok gyakran fordulnak elő parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásánál, így ezeknél a feladatoknál előnyös J helyett GS módszert használni.

Mint a 1. fejezetben láttuk, a stacionáris iterációs eljárások konvergenciájának gyorsasága B spektrálrádiuszától függ, ezért B -nek minden olyan módosítása, amely csökkenti a spektrálrádiuszt, a konvergencia gyorsítását eredményezi. A továbbiakban a J és GS módszer olyan módosításával foglalkozunk, amelyek gyorsítják e két alapmódszer konvergenciáját.

3. Szimultán overrelaxáció /JOR/

A szimultán overrelaxációs vagy JOR módszer a Jacobi módszerből származik. Iterációs sémája

$$u^{/n+1/} = B_{\omega} u^{/n/} + C, \text{ ahol } B_{\omega} = \omega B + /1-\omega/ I \text{ és } \omega \text{ egy}$$

általunk megfelelő módon választott paraméter. Ha $\omega \neq 0$, a módszer teljesen konzisztens. Ha $\omega = 1$, akkor a J módszert kapjuk vissza. Ha $\omega > 1$, akkor $u^{/n+1/}$ -t "felüljavítjuk" egy bizonyos értelemben, mivel

$$u^{/n+1/} = u^{/n/} + \omega / \bar{u}^{/n+1/} - u^{/n/} /, \text{ ahol } \bar{u}^{/n+1/} \text{-t a J módszer szerint kapjuk. Ha viszont } \omega < 1, \text{ akkor } u^{/n+1/} \text{-t}$$

"aluljavítjuk". A feladat az, hogy ω -t meghatározzuk úgy, hogy $S(B_{\omega})$ minimális legyen. Ezt a nehéz problémát később részletesen tárgyaljuk.

Most néhány olyan tétel következik, amelyek megkönnyítik a JOR alkalmazhatóságának eldöntését.

T é t e l :

Ha J módszer konvergens, akkor a JOR is az $0 < \omega \leq 1$ -re.

Bizonyítás:

Mivel $B_\omega = \omega B + (1-\omega) I$, ezért a B_ω ρ_i és a B μ_i saját értékeire fennáll a $\rho_i = \omega \mu_i + (1-\omega)$ összefüggés.

Ha $\mu_i = r e^{i\theta}$ $r < 1$ és $0 < \omega < 1$ alakba írjuk, akkor $|\rho_i|^2 = \omega^2 r^2 + 2\omega r \cos\theta(1-\omega) + (1-\omega)^2 \leq (\omega r + 1 - \omega)^2 < 1$, tehát a JOR módszer konvergens.

Tétel:

Ha A irreducibilis, gyengén diagonál-domináns mátrix, akkor a JOR $0 < \omega \leq 1$ esetén konvergál. /Biz. lásd (19) /.

Tétel:

Legyen A valós szimmetrikus, nem-szinguláris, pozitív diagonálelemű mátrix. A JOR módszer akkor és csak akkor konvergál, ha A és $(2\omega^{-1}D - A)$ pozitív definit. Itt $D = \text{diag } A$. A $(2\omega^{-1}D - A)$ $|\omega \neq 0|$ mátrix viszont akkor és csak akkor pozitív definit, ha

$$0 < \omega < \frac{2}{1 - \mu_{\min}} \leq 2 \quad \text{/Biz. lásd (19) /}$$

Amit a J és GS módszer használatával kapcsolatban megjegyeztünk, igaz a JOR és a GS módszerből a JOR-hoz hasonló módon származtatott SOR módszer esetén is.

4/a. A szukszcessziv overrelaxációs vagy SOR módszer

A szukszcessziv overrelaxációs módszer iterációs sémája:

$$u^{(n+1)} = \omega u^{(n)} + (I - \omega L)^{-1} \omega c, \quad \text{ahol } \omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1-\omega)I)$$

Ha A nonszinguláris és $\omega \neq 0$, akkor a SOR teljesen konvergens.

Ha $\omega = 1$, a SOR a GS módszerre redukálódik. A JOR-hoz hasonlóan $\omega > 1$ esetben "felüljavítást", $\omega < 1$ esetén "aluljavítást" hajtunk végre. Igazak az alábbi tételek:

T é t e l :

Legyen A irreducibilis, gyengén diagonál domináns mátrix. Ekkor a GS módszer konvergens és $0 < \omega \leq 1$ -re a SOR is konvergál. /Biz. lásd (19) /.

T é t e l :

Pozitív definit, szimmetrikus mátrix esetén a SOR módszer konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy a $0 < \omega < 2$. /Biz. lásd (19) /.

T é t e l :

Legyen $A = I - M$ irreducibilis L -mátrix. A GS és J módszer akkor és csak akkor konvergál, ha az A sorai szerint általánosan diagonál domináns. /Biz. ld. (9) /.

T é t e l :

/i/ Legyen $A = I - (L+U)$ irreducibilis $n \times n$ -es mátrix, L és U nemnegatív. A SOR $0 < \omega \leq 1$ -re csak akkor konvergens, ha A sorai szerint általánosan diagonál domináns. /Biz. ld. (9) /.

/ii/ Legyen $\bar{A} = I - L + U$ irreducibilis $n \times n$ -es mátrix, L és U nemnegatív. A SOR $\omega > 1$ -re csak akkor konvergens, ha \bar{A} sorai szerint általánosan diagonál domináns. /Biz. lásd (9) /.

T é t e l :

Legyen $A = D + E + F$ $n \times n$ -es együtttható mátrix, ahol $D = \text{diag } /a_{11}, \dots, a_{nn}/$, $a_{ii} \neq 0$ $1 \leq i \leq n$ és E, F alsó, illetve felső háromszög mátrixok. Legyen A' egy olyan mátrix, amit A -ból úgy kapunk, hogy sorait és oszlopait beszorozzuk tetszőleges nem zéró szorzóval. Ekkor a SOR iteráció A mátrixának és A' -nek ugyanazok a sajátértékei.

Következmény: A SOR módszer akkor és csak akkor konvergens az A együtttható mátrix esetén, ha konvergens A' -re és a konvergencia aszimptotikus gyorsasága ugyanaz mindkét esetben.

Ha az A mátrixból sorai és oszlopai beszorzásával kapott A' mátrix diagonál domináns, akkor a GS és a J módszer konvergál az eredeti A mátrix esetén is.

Ha az A' transzformált mátrix diagonál domináns, akkor a SOR konvergál

$$0 < \omega < \omega^* = \frac{2}{1 + \min(S_1, S_2)} \quad \text{-ra, ahol}$$

$$S_1 = \max_i \frac{\sum_j |a'_{ij}|}{|a'_{ii}|}$$

$$S_2 = \max_i \frac{\sum_j |a'_{ij}|}{|a'_{ii}|}$$

T é t e l :

Legyen $A = D - B$ egy irreducibilis, L-mátrix.

A SOR ($0 < \omega \leq 1$ -re) és a Jacobi módszer akkor és csak akkor konvergens, ha A általánosan diagonál domináns sorai szerint.

Ha A Hermite mátrix, pozitív diagonál elemekkel, akkor a SOR konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy A pozitív definit legyen.

Az /1/ egyenlet overrelaxációval történő megoldásánál szereplő ω_b overrelaxációs paraméter optimális meghatározása fontos és nehéz probléma. Ha A konzisztensen rendezett és nem eltűnő diagonális mátrix, és a $B = I - \text{diag} A^{-1} A$ mátrixnak van valós sajátértéke és igaz, hogy $\bar{\mu} = S/B < 1$, akkor az

$$\omega_b = \frac{2}{1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \left(\frac{\bar{\mu}}{1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \quad \bar{\mu} = S(B) \quad (*)$$

Összefüggéssel definiált ω_b -re igaz, hogy

$$S / \ell_{\omega_b} / = \omega_b - 1$$

és ha $\omega \neq \omega_b$, akkor

$$S / \ell_{\omega} / > S / \ell_{\omega_b} /.$$

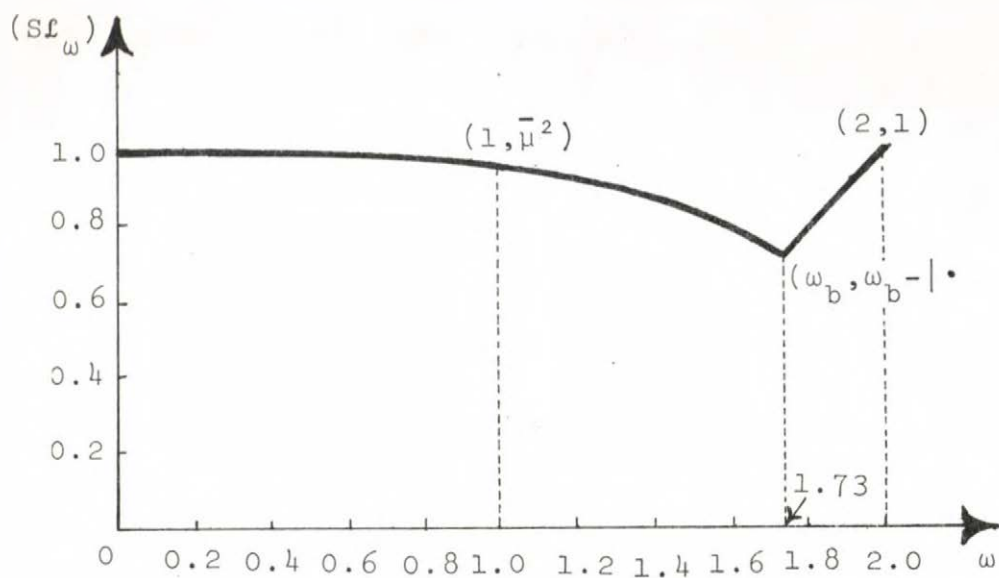
Továbbá tetszőleges ($0 < \omega < 2$) ω -ra

$$S / \ell_{\omega} / = \begin{cases} \left(\frac{\omega \bar{\mu} + (\omega^2 \bar{\mu}^2 - 4(\omega - 1))^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 & \text{ha } 0 < \omega \leq \omega_b \\ \omega - 1 & \text{ha } \omega_b \leq \omega < 2 \end{cases} \quad (**)$$

És végül, ha $0 < \omega < \omega_b$, akkor $S / \ell_{\omega} /$ szigorúan csökkenő függvénye ω -nak. $\bar{\lambda} = S / \ell /$, és $\bar{\mu} = S / B /$ jelöléseket bevezetve $(*)$ -ből és a fenti tételből kapjuk, hogy

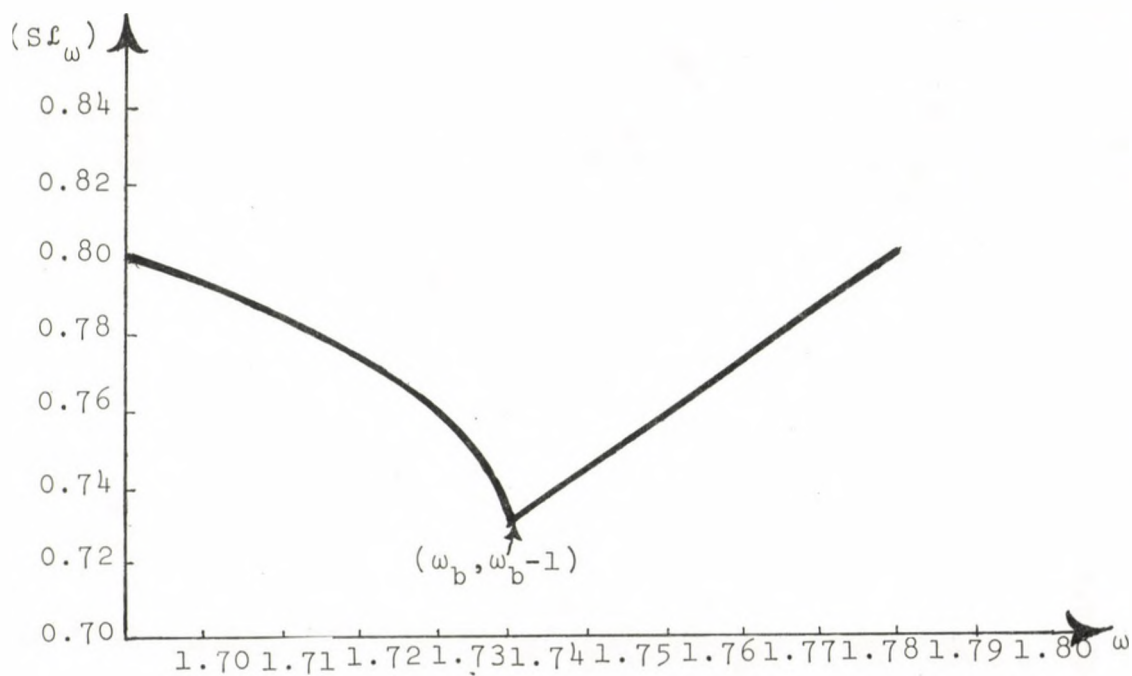
$$\omega_b = \frac{2}{1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1 + (1 - \bar{\lambda})^{\frac{1}{2}}} \quad \bar{\lambda} = \bar{\mu}^2 \quad (***)$$

Ezért $\bar{\lambda}$ vagy $\bar{\mu}$ ismeretében $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ és ω_b értékét is megtudjuk határozni. Az optimális ω kiválasztásához alapvetően fontos $S / \ell_{\omega} /$ -nak mint ω függvényének a viselkedése. Az alábbi ábrán $S / \ell_{\omega} /$ -t ω függvényében szemlélíteti. $\bar{\mu} = 0.987688$ esetén, ami megfelel a Diriclet problémaegység négyzetén, $h = \frac{1}{20}$ rácstávolsággal öt-pontos differencia sémával történő megoldásának.



1. ábra

$$\mu = \cos \frac{\pi}{20} \quad 0 \leq \omega \leq 2$$



2. ábra

$$\mu = 0.987688$$

$$1.70 \leq \omega \leq 1.8$$

Miközben ω nő 0-tól 1-ig, azalatt S/ℓ_ω lassan csökken 1-ről $\bar{\mu}^2 = 0.975528$ -ig. Ha ω -t tovább növeljük, S/ℓ_ω egy kicsit gyorsabban csökken ω_b -ig $|\omega_b|=1.72945$ és ebben a pontban a csökkenés nagyon gyors. Pontosabban, ha (XX)-t deriváljuk azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{S(\ell_\omega)^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{d\omega} S(\ell_\omega) = \frac{d}{d\omega} (\omega\bar{\mu} + (\omega^2\bar{\mu}^2 - 4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \frac{-4(1-\bar{\mu}^2)}{(\omega^2\bar{\mu}^2 - 4(\omega-1))^{\frac{1}{2}} \{ \bar{\mu}(\omega^2\bar{\mu}^2 - 4(\omega-1))^{\frac{1}{2}} + (2-\omega\bar{\mu}^2) \}}$$

$0 < \omega < \omega_b$ -re. Ebből látható, hogy ha $\omega \rightarrow \omega_b$, akkor S/ℓ_ω iránytangense közel $-\infty$. S/ℓ_ω értéke $\omega = \omega_b$ -re $\omega_b - 1 = 0.72945$. Ha ω -t tovább növeljük, S/ℓ_ω lineárisan nő, amíg befut a $1/2, 1/$ pontban.

Evidens, hogy ω_b -nek egy kis csökkenése nagy relatív növekedést okoz a konvergencia sebességben, mint ugyanakkorra növekedése. Ezt illusztrálják az ábrák. Ennél a példánál $\omega = 1.72$ -t használva $\omega_b = 1.72945$ helyett a konvergencia sebesség relatív növekedése 24. 80 %, míg $\omega = 1.74$ -t használva csak 4.55 %.

Hogy ω_b pontos értékét megkapjuk, ℓ_ω sajátértékeinek viselkedését tanulmányozzuk ω és μ függvényében. Részletes vizsgálat alapján a következőt mondhatjuk: Ha B-nek $\bar{\mu}$ egyszeres sajátértéke, /Ez az eset akkor áll elő, ha A Stieltjes mátrix, ekkor $\bar{\mu}$ egyszeres sajátérték/, akkor $0 < \omega < \omega_b$ -re S/ℓ_ω az ℓ_ω -nak szintén egyszeres sajátértéke és abszolút értéke nagyobb, mint ℓ_ω más sajátértékéé. $\omega = \omega_b$ -re S/ℓ_{ω_b} kettős sajátérték, amelynek csak egy lineárisan független S/ℓ_{ω_b} sajátvektor felel meg. Ezért ℓ_{ω_b} Jordan kanonikus alakja nem diagonális. Ráadásul ℓ_{ω_b} összes sajátértékének abszolút értéke $(\omega_b - 1)$.

Kihasználva, hogy Stieltjes mátrixoknál egyetlen legnagyobb sajátérték van, és hogy ω_b -t célszerű alulról becsülni, az A mátrix legnagyobb sajátértékének kiszámolása Fagyajev és Fagyajeva által kidolgozott "hatványmódszerrel" történhet. Egy tetszőleges v vektort választva, ki kell számolni az Av, A^2v, A^3v, \dots vektorokat. Ha A -nak csak egy S/A abszolút értékű sajátértéke van, akkor - ha csak nem nagyon szerencsétlenül választjuk v -t - a kiszámolt vektorok konvergálnak a λ_1 -hez kapcsolt v_1 sajátvektor többszöröséhez. Ebből ω_1 könnyen megkapható. /A "hatványmódszer" /power/ nem hatásos, ha több sajátérték abszolút értéke S/A . Eredményesen lehet használni S/ℓ_ω meghatározására, ha $\omega < \omega_b$, de nem hatásos, ha $\omega \geq \omega_b$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha ismerünk egy A mátrixhoz tartozó optimális ω -t, akkor az A -ból meghatározott módon származtatott A' mátrixhoz tartozó optimális ω -ra is becslést kaphatunk. Ha pl. A L -mátrix és A_1 az A -ból ugye keletkezik, hogy A -ból néhány sort és oszlopot töröltünk, akkor igaz, hogy $S/B_1 \leq S/B$.

Itt $B_1 = I - \text{diag } A_1^{-1} A_1$ és $B = I - \text{diag } A^{-1} A$. Ha A szimmetrikus és A_1 szintén oszlopok és sorok elhagyásával keletkezik, akkor

$$\underline{\lambda}/A/ \leq \underline{\lambda}/A_1/ \leq \bar{\lambda}/A_1/ \leq \bar{\lambda}/A/ , \text{ ahol } \underline{\lambda}/A/ \text{ és } \bar{\lambda}/A/$$

az A legkisebb, ill. legnagyobb sajátértékét jelöli.

Ha A pozitív definit és $B[A] = I - \text{diag } A^{-1} A$, akkor

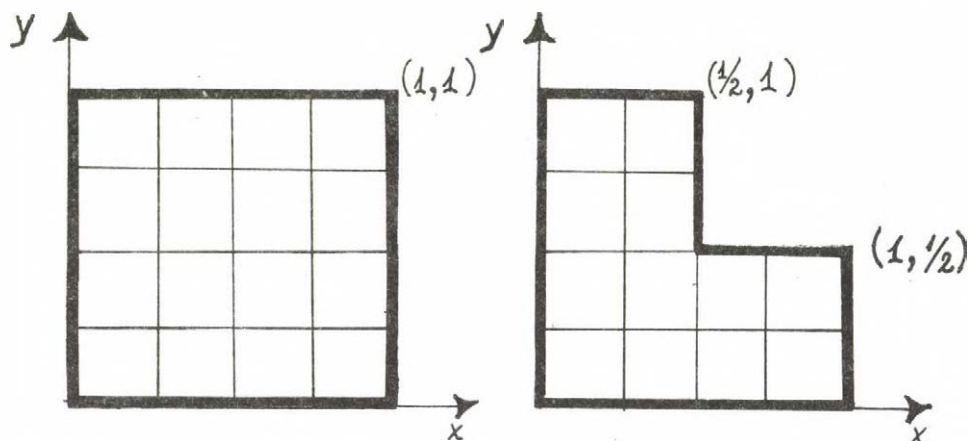
$$S/B [A_1] / = S(B[A]) \quad \text{és}$$

$$K/A/ = \bar{\lambda}(A)/\underline{\lambda}(A) \geq \bar{\lambda}(A_1)/\underline{\lambda}(A_1) = K/A_1/$$

Ha az A , illetve A' mátrix az ötpontos sémával diszkretizált Dirichlet probléma által generált mátrix, és R_h rácsháló sűrűbb mint a R'_h rácsháló, akkor $S/B' / \leq S/B /$,

ahol $B = I - \text{diag } A^{-1}A$, $B' = I - \text{diag } A'^{-1}A'$. (Biz. ld. 19)

Példaként megemlítjük, hogy Laplace egyenlet R négyzet-
ten történő megoldásnál $S/B = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$, vi-
szont az R' L-alaku tartomány esetén $S/B = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.432$



A fenti példák olyan szerencsések voltak, hogy ω_b -t
direkt uton sikerült meghatározni, azaz a parciális dif-
ferenciál- ill. differencia-operátor sajátérték problé-
máját direkt módon megoldottuk. A gyakorlatban sajnos
ritkán találkozunk ilyen feladatokkal, ezért olyan, un.
iterációs módszerekre volt szükség, amelyekkel bonyolul-
tabb esetben is meghatározhatjuk ω_b értékét.

Ezeket az iterációs módszereket két részre oszthatjuk
annak alapján, hogy több azonos mátrixu problémát aka-
runk megoldani, vagy nem. Ha igen, akkor az un. "kisér-
let és hiba" módszert célszerű alkalmazni. Mivel ω_b
rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $\omega = \omega_b$ vá-
lasztás mellett leggyorsabb a konvergencia, így ω -t
megfelelően változtatva a konvergencia sebességet figyel-
ve ω_b -hez eljuthatunk. A konvergencia gyorsaság mérté-

kéül a $\Theta_n = \frac{\|\delta^{(n+1)}\|_\infty}{\|\delta^{(n)}\|_\infty}$ számot használhatjuk, ahol

$\delta^{(n)} = u^{(n+1)} - u^{(n)}$. Könnyű igazolni, hogy $\delta^{(n)} = \mathcal{L}_\omega^n \delta^{(0)}$,

igy ha S/L_ω az L_ω egy egyszeres sajátértéke és $|\lambda| < S/L_\omega / L_\omega$ minden más λ sajátértékre, akkor $\delta^{(n)}$ konvergál az S/L_ω -hez kapcsolt v sajátvektor többszöröséhez. Így $\omega < \omega_b$ -vel kezdjük az iterációt és θ_n -t figyeljük. Ha stabilizálódik egy $\bar{\theta}$ szám körül, akkor ezt a θ -t S/L_ω becsléseként elfogadjuk. (**)-ből $\bar{\mu}$ -t kifejezve kapjuk $\bar{\mu} = (\bar{\theta} + \omega - 1) / (\omega \theta^{\frac{1}{2}})$. Innen és (***)-ból kapunk egy ún. $\tilde{\omega}_b$ -t, amivel kezdhethetjük a SOR iterációt. Stb. Ha a kezdő ω -ra $\omega \geq \omega_b$, akkor a θ_n értékek oszcillálnak és S/L_ω -t nehéz becsülni, ezért ω -t szukcesszive csökkentjük amíg θ_n konvergens nem lesz. Több iterációs séma épül ugyanerre az elvre:

Kulsrud 1961-ben kimutatta, hogy a θ_n hányados csak nagy iteráció szám esetén konvergens /Diriclet problémára 400 rácspont esetén kb. 100 iteráció/, ezért egy módosítást ajánl, ami különösen nem téglalap tartományon megoldandó Diriclet probléma esetén előnyös, vagy ha a tartomány határa nem a rácshálózaton fekszik.

Továbbá hasonló területű idom ω_b -je felhasználható, így az iteráció szám 50%-kal csökken. $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ monoton növvő sorozatot konstruál. Az

$$\omega_1 = \frac{2}{1 + \frac{1 - \sqrt{(\omega_0 - 1 + \lambda)^2}}{\omega_0^2 \lambda}} > \omega_b$$

képlet ismételt alkalmazásával jut egyre közelebb ω_b -hez, viszont a módszer csak $\omega_0 < \omega_b$ esetén alkalmazható addig, amíg $\omega > \omega_b$. Ezzel a módszerrel Laplace egyenletet old meg 300-4086 rácspont esetén is. Carré /1961/, Rigler /1965/, majd Reid /1966/ módosította még a fent leírt módszert.

Carré ugyancsak az $\omega = \frac{2}{1 + (1 - \bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}}$ képletre támaszkodik, iterál néhányszor és a két utolsó vektor normájának viszonyából egy ω' -t számol ki. A következő iterá-

ciót azonban nem ezzel folytatja /mint Kulsrud/, hanem $\omega_{k+1} = \omega'_k - \frac{1}{4}(2-\omega'_k)$ képlet szerint módosítja. Ez a módszer nagyon hatásos, ha \mathcal{L}_ω domináns és szubdomináns gyökének hányadosa nagy.

Reid kihasználja azt a tényt, hogy a Jacobi mátrix Z_i sajátvektora összefügg a SOR mátrixának y_i sajátvektorával. Mivel $\mu = \max_{x \neq 0} \frac{x^T(L+L^T)x}{x^T D x}$, így tetszőleges

$\frac{x^T(L+L^T)x}{x^T D x}$ érték segítségével alulbecsli ω_b -t, így ki-
küzöböli, hogy ω ω_b -nél nagyobb legyen.

Az idáig ismerttetett módszerekről Young és Shaw kimutatták, hogy csak akkor használhatók előnyösen, ha több azonos mátrixu egyenletet kell megoldani, mivel ω_b jó becsléséhez túl sok iteráció kell.

Ha nem több, azonos mátrixu egyenletet akarunk megoldani, akkor $S(\mathcal{L})$ -re a már ismerttetett Power módszerrel becslést adunk, mielőtt a SOR iterációt végrehajtanánk. Hagemann és Kellog /1966, 1968-ban/ a Csebisev polinomok felhasználásával gyorsították a Power módszer konvergenciáját. Kritériumot adtak a konvergencia befejezésére és minimalizálták a számolási időt abban az esetben,

ha A szimmetrikus és $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ alakú, ahol D_1

és D_2 négyzetes, diagonál mátrixok. $\tau = \frac{\lambda'}{\lambda}$ értékét

kell becsülni, ahol $\lambda \leq \bar{\lambda}' \leq \bar{\lambda}$ minden $\lambda (\lambda \neq \bar{\lambda})$

sajátértékére. Ha \mathcal{L} minden sajátértéke egyszeres, akkor $\bar{\lambda}'$ az \mathcal{L} második legnagyobb sajátértéke. A módszer egy tetszőleges $v^{(0)}$ vektorral kezd, és minden n -re kiszámolja a $v^{(n)} = P_n / \mathcal{L} / v^{(0)}$ -t, ahol $P_n / \mathcal{L} /$ \mathcal{L} -nek olyan polinomja, hogy $P_n / \lambda /$ minimális a $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}'$ -ra és $P_n(\bar{\lambda}) = 1$. Speciális esetben, amikor $P_n / \mathcal{L} / = \mathcal{L}^n$ az iteráció egybeesik a GS iterációval. Kiderül, hogy $P_n / \mathcal{L} /$ legjobb

választása kapcsolatban van bizonyos Csebisev polinomokkal. A módszert ismételten alkalmazva v^1, v^2, \dots vektorozatot kapunk, amely az S/l -hez kapcsolt sajátvektor többszöröséhez konvergál.

4/b Komplex SOR módszer

A SOR módszer alkalmazhatóságát ki lehet terjeszteni komplex lineáris egyenletrendszer megoldására. Kredell 1962-ben az elektromágneses térelmélet tanulmányozása során arra a következtetésre jutott, hogy nagy szükség lenne a komplex egyenletrendszer megoldásának gyorsítására. Amikor egy lineáris elektromágneses térnek szinuszos kényszerfeltételei vannak /mint a korlátos peremfelület mentén megadott feszültség, áram vagy térmező/, akkor általában a tér-egyenlet partikuláris integráljai érdekesek, amelyek mint az idő függvényei szinuszosak, ez az ún. stacionáris eset. A villamosmérnökök által jól ismert "szimbólikus módszert" használva egy komplex együtthatós elliptikus egyenletet kapunk, amelyet nehéz analitikusan megoldani, még egyszerű geometriájú probléma esetén is. Differencia módszerekkel ilyenkor nagy komplex lineáris egyenletrendszert kapunk, amelyet az alább ismertetendő komplex SOR módszerrel meg lehet oldani:

Vizsgáljuk az $Au = b$ komplex lineáris egyenletrendszert, ahol $A = (a_{ij})$ adott komplex $n \times n$ -es mátrix és b adott oszlopvektor. Tegyük fel, hogy A nemszinguláris és $a_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, N$. A valós esettel analóg komplex SOR iterációs képlete:

$$u^{(n+1)} = L_{\omega} u^{(n)} + \ell_{\omega} b \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ahol}$$

$$L_{\omega} = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega)I) \quad \text{és} \quad \ell_{\omega} = \omega (I - \omega L)^{-1}$$

Itt $\omega = \gamma + i\delta$ az overrelaxációs faktor, amit a konvergencia sebesség gyorsítására használunk. A hibavektor

$$\varepsilon^{(n)} = u^{(n)} - u \quad \varepsilon^{(n+1)} = L_{\omega} \varepsilon^{(n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ahol u az $Au = b$ egyetlen megoldása. Mint ismert

$$S(L_{\omega}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{\varepsilon \neq 0} \frac{\|L_{\omega}^n \varepsilon\|}{\|\varepsilon\|} \right)^{\frac{1}{n}}$$

/Itt $\| \cdot \|$ egy komplex vektor tetszőleges normája./

Itt is igaz, hogy $\frac{\|\varepsilon^{(n+1)}\|}{\|\varepsilon^{(n)}\|} \approx S(L_{\omega})$ elég nagy n -re.

Tegyük fel, ismerjük a B mátrix sajátértékeinek elhelyezkedését. Legyen az ω sikon Ω az a tartomány, ahol $|S(L_{\omega})| < 1$, $\omega \in \Omega$ Ω -t az iterációs módszer konvergencia tartományának nevezzük. Ω ismeretében meghatározzuk azt az $\omega_0 \in \Omega$ -t, amelyre $S(L_{\omega_0}) \leq S(L_{\omega}) < 1$ $\omega \in \Omega$, azaz $u^{(0)}$ -től független legjobb ω -t.

A valós esetre ismert Young-féle reláció komplex esetre is érvényes.

T é t e l :

Legyen A komplex mátrix A -tulajdonságu és legyen τ az $L_{\omega, \tau}$ mátrix által definiált iteráció konzisztensen rendezése. Ha $\lambda (\neq 0)$ az $L_{\omega, \tau}$ sajátértéke és μ kielégíti a

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \quad (4b.1)$$

relációt, akkor μ a B -nek sajátértéke. Fordítva ha μ a B egy sajátértéke és λ kielégíti (4b.1)-t, akkor λ az $L_{\omega, \tau}$ sajátértéke.

A (4b.1) reláció egy leképezés a komplex μ és λ sikok között

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \mu \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \\ \zeta &= z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \\ \lambda &= \alpha^2 \zeta^2 \quad \text{ahol} \quad \alpha = (\omega - 1)^{\frac{1}{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

Legyen $E(\alpha)$ a μ sikon egy $(\frac{1}{|\alpha|} \pm |\alpha|) / |\alpha| + \frac{1}{\alpha}$ féltengelyű ellipszis, amelynek nagytengelye

$$\psi = \arctg \frac{1-|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2} \operatorname{tg} \rho \quad (\alpha = |\alpha| e^{i\rho})$$

szöget zár be a μ sik valós tengelyével.

Ennek az ellipszisnek a képe a z síkon egy $E_{|\alpha|}$ ellipszis, amelynek féltengelyei: $\frac{1}{2} \left(|\alpha| \pm \frac{1}{|\alpha|} \right)$

Tétel:

Ha a B mátrix minden sajátértéke az $E(\alpha)$ ellipszis belsőjében van és $|\omega-1| < 1$, akkor L_ω összes λ_i sajátértékére $|\lambda_i| < 1$, azaz a komplex SOR konvergens.

Első megjegyzés: Young azzal az esettel foglalkozott, amikor ω valós és $1 < \omega < 2$. Ekkor az ellipszis

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2} = 1 \quad \text{a } \mu \text{ síkon. Ha } l \text{ valós, akkor}$$

$$\alpha = \sqrt{\omega-1}.$$

Második megjegyzés: Ez a tétel egyuttal definiálja a Ω konvergencia tartományt.

Ha az A mátrix A -tulajdonságu (azaz létezik az A mátrix sor és oszlop permutációs transzformációinak egy sorozata, hogy A tridiagonális lesz), akkor B összes sajátértéke \pm párban fordulnak elő. Legyen $\pm \tilde{\mu}$ un. kritikus sajátértékpár az összes ω -hoz tartozó legnagyobb λ -nak megfelelő μ pár, azaz pontosabban: A B mátrix kritikus sajátértékpárja az a két sajátérték, amely λ_1 és λ_2 -be van leképezve és ezekre $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ nagyobb, mint L_ω minden más λ sajátértékének abszolút értékére, minden ω figyelembevételével. Minden ω -ra a $\pm \tilde{\mu}$ pár megfelel az L mátrix domináns sajátértékének, ami a konvergencia gyorsaságát határozza meg.

T é t e l :

Vizsgáljunk egy konvergens komplex SOR eljárást az $Au = b$ megoldására:

$$u^{(n+1)} = L_{\omega, \sigma} u^{(n)} + \ell_{\omega} b$$

ahol A A -tulajdonságu és az iterációs rendezés konzisztens. Tegyük fel, hogy a B mátrixnak van egy kritikus $\pm \tilde{\mu}$ sajátértékpárja. Az optimális ω -t, amely minimalizálja az $L_{\omega, \sigma}$ spektrálrádiuszát és ennél fogva maximalizálja a konvergencia aszimptotikus gyorsaságát az

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \tilde{\mu}^2}} \quad \text{képlet adja meg és}$$

$S(L_{\omega, \sigma})$ minimuma:

$$S(L_{\omega_0, \sigma}) = \omega_0 - 1,$$

Megjegyzés: Ezek az eredmények azonosak a valós eset eredményeivel, de itt külön gondolni kell a kritikus sajátértékpár létezésének biztosítására.

$$\text{Kredell} \quad a \quad \Delta u = zu + F(x, y) \quad x, y \in D \quad u=0 \quad \Gamma-n$$

(D egységnégyzet, Γ a határa)

komplex peremérték feladaton próbálta ki a módszerét. A példában $F(x, y) = \text{constans}$, $D-n$. D -t egyenletes h -távolságu ráccsal fedi be és ötpontos differencia-sémát használ. Ilyen feladatnál a B sajátértékei:

$$\mu_{ij} = \frac{2}{4+h^2z} \left(\cos \frac{\pi i}{M} + \cos \frac{\pi j}{M} \right) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, M-1, \\ j=1, \dots, M-1 \end{matrix}$$

ahol $M = \frac{1}{h}$. Belátható, hogy létezik $\pm \tilde{\mu}$ kritikus sajátértékpár és $\tilde{\mu} = \frac{4}{4+h^2z} \cos \frac{\pi}{M}$.

Ebből ω_0 a fenti képlet szerint számolható.

Ebből

$$M = 20 \quad h^2 z = 2,29i \quad \text{esetén} \quad \omega_0 = 1,0302 - i0,2$$

$$M = 30 \quad h^2 z = 2,29i \quad \text{esetén} \quad \omega_0 = 1,0295 - i0,2027$$

$$M = 30 \quad h^2 z = -\frac{16}{9}i \quad \text{esetén} \quad \omega_0 = 1,0731 + i0,2384$$

eredményt kapta.

5. A módosított szukszcessziv overrelaxációs /MSOR/ módszer

Az MSOR módszer a SOR módszernek olyan módosítása, amely egy ω helyett, két különbözőt használ. Tekintsük ismét az $Au=b$ rendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}.$$

Itt D_1 és D_2 négyzetes, nonszinguláris diagonál mátrixok. Az egyik ω relaxációs faktor a piros /amely D_1 -nek felel meg/, a másik ω' -t, a fekete egyenlet számolásánál használjuk. /A feketék D_2 -nek felelnek meg./ Irhatjuk

$$\begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{vagy}$$

$$D_1 u_1 + H u_2 = b_1$$

$$K u_1 + D_2 u_2 = b_2$$

Ebből

$$u_1 = F u_2 + c_1$$

$$u_2 = G u_1 + c_2, \quad \text{ahol}$$

$$F = -D_1^{-1}H, \quad G = -D_2^{-1}K, \quad c_1 = D_1^{-1}b_1,$$

$$c_2 = D_2^{-1}b_2$$

Ezt $u = Bu + C$ alakban írhatjuk, ahol $B = \begin{pmatrix} O_1 & F \\ G & O_2 \end{pmatrix}$ alakú

Igy az MSOR módszer

$$u_1^{/n+1/} = \omega /F u_2^{/n/} + c_1/ + /1 - \omega/ u_1^{/n/}$$

$$u_2^{/n+1/} = \omega' /G u_1^{/n+1/} + c_2/ + /1-\omega'/ u_2^{/n/}$$

vagy más alakban

$$u^{/n+1/} = f_{\omega, \omega'} u^{/n/} + k_{\omega, \omega'}$$

$\omega = \omega'$ -re az MSOR a SOR-ra redukálódik.

Az MSOR módszert először De Vogelaere /1958/ vizsgálta fix ω és ω' esetén.

A konvergencia gyorsításához itt is $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértékeit kell vizsgálni. Bebizonyították, hogy \oplus alakú, nem eltűnő diagonális A mátrix esetén igaz, hogy

- (a) ha μ a B nem zéró sajátértéke és λ kielégíti a
- $$|\lambda + \omega - 1| / |\lambda + \omega' - 1| = \omega \omega' \mu^2 \lambda \quad (*a)$$

egyenletet, akkor λ az $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ egy sajátértéke. Ha $\mu = 0$ B sajátértéke, akkor $\lambda = 1 - \omega'$ és/vagy $\lambda = 1 - \omega$ az $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértéke.

- (b) ha λ az $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértéke, akkor létezik B -nek olyan μ sajátértéke, hogy $(*a)$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy $(*a)$ $\omega = \omega'$ esetén $(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda$ -ra redukálódik.

Ha A a fenti tulajdonságu és B hasonló egy diagonál mátrixhoz, akkor igaz (a) helyett a következő:

- (a') $|a'|$ ha $\mu = 0$ B -nek sajátértéke, akkor $(1 - \omega)$ vagy $(1 - \omega')$ $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértéke, ha FG és GF szinguláris. Ha $r > s$, vagy $r < s$, ahol r és s az FG és GF rangja, akkor $\mu = 0$ B -nek sajátértéke és FG vagy GF szinguláris. Ha $r = s$ és a $\mu = 0$ B -nek sajátértéke, akkor FG és GF is szinguláris és $1 - \omega$ és $1 - \omega'$ is sajátértéke $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ -nek.

Ha A a fenti tulajdonságu, akkor

- (a) $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ egy λ sajátértéke, akkor és csak akkor sajátértéke $\mathcal{L}_{\omega', \omega}$ -nek, ha teljesül a következő feltételek egyike:

- /i/ $\omega = 0$ vagy $\omega' = 0$
- /ii/ $\lambda = 0$
- /iii/ $\lambda \neq 1 - \omega$ és $\lambda \neq 1 - \omega'$

- (b) Ha $\omega \neq 1$ és $1 - \omega$ $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértéke, akkor $1 - \omega'$ $\mathcal{L}_{\omega', \omega}$ egy sajátértéke. Ha $\omega' \neq 1$ és $1 - \omega'$ $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ sajátértéke, akkor $1 - \omega$ $\mathcal{L}_{\omega, \omega'}$ egy sajátértéke.

1965-ben Young továbbfejlesztette az MSOR módszert úgy, hogy az iteráció közben ω -t és ω' -t változtatta. Ekkor a formulák:

$$u_1^{(n+1)} = \omega_{n+1} / F u_2^{(n)} + c_1 / + / 1 - \omega_{n+1} / u_1^{(n)}$$

$$u_2^{(n+1)} = \omega'_{n+1} / G u_1^{(n+1)} + c_2 / + / 1 - \omega'_{n+1} / u_2^{(n)} \text{ alakúak.}$$

Elegendő feltételt ad a módszer konvergenciájára Young az iterációs paraméterekre vonatkozóan. Megmutatja, hogy ω és ω' változtatásával nem jutunk előnyhöz, ha az A mátrix pozitív és \oplus alakú. Ekkor, még a jólválasztott paraméterek sem jobbak, mint $\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 = \dots = \omega_b$ választása esetén, ahol ω_b a legjobb egyes paraméter. Az iterációs paraméterek $\omega_1 = \omega'_1 = 1$, $\omega_2 = \omega'_2 = \omega_3 = \dots = \omega_b$ mellett a Sheldon módszert kapjuk és $\omega_1 = 1$ $\omega'_1 = \omega_2 = \omega'_2 = \dots = \omega_b$ választás esetén pedig a módosított Sheldon és a ciklikus Csebisev szemi-iterációs módszer. /A szemi-iterációs módszerekről később lesz szó,/

Ha az A mátrix pozitív definit, és \oplus alakú, akkor az MSOR, ami az $\omega_1, \omega'_1, \omega_2, \omega'_2, \dots$ relaxációs faktorok használatán alapul, konvergál. feltéve, hogy a következő feltételeknek legalább egyike teljesül.

(a) Valamely $\varepsilon > 0$ -ra érvényes

$$\varepsilon < \omega_i < 2 - \varepsilon, \quad \varepsilon < \omega'_i < 2 - \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots$$

minden elég nagy i -re

(b) Minden elég nagy i -re $0 \leq \omega_i \leq 2$, $0 \leq \omega'_i \leq 2$ és

$$a \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \omega'_i (2 - \omega_i) (2 - \omega'_i) \text{ sor divergens.}$$

6. A szimmetrikus overrelaxációs módszer (SSOR)

Az SSOR módszert két fél iterációból konstruáljuk. Az első fele ugyanaz, mint a SOR módszer, a második fél iteráció pedig egy olyan SOR módszer, amit fordított sorrendben alkalmazunk.

$u^{(n+1/2)}$ -t $u^{(n)}$ -ből az ún. "előrehaladó" SOR módszerrel határozzuk meg.

$$u^{(n+1/2)} = f_{\omega} u^{(n)} + (I - \omega L)^{-1} c \quad \text{és} \quad (6.1)$$

$u^{(n+1)}$ -t az $u^{(n+1/2)}$ -ből a "hátrahaladó" SOR módszerrel:

$$u^{(n+1)} = u_{\omega} u^{(n+1/2)} + (I - \omega U)^{-1} c, \quad \text{ahol}$$

$$f_{\omega} = (I - \omega L)^{-1} \omega U + (1 - \omega) I \quad (6.2)$$

$$u_{\omega} = (I - \omega U)^{-1} \omega L + (1 - \omega) I$$

(6.1)-ből és (6.2)-ből

$$u^{(n+1)} = \rho_{\omega} u^{(n)} + \omega/2 - \omega / (I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} c$$

ahol

$$\rho_{\omega} = U f_{\omega}$$

Evidiense, hogy $\rho_{\omega} = (I - \omega/2 - \omega / (I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1})^{-1} A$.

$I - \rho_{\omega}$ nonszinguláris, ha $0 < \omega < 2$ és A sem nonszinguláris. Mivel $\omega/2 - \omega / (I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} c = (I - \rho_{\omega})^{-1} A^{-1} b$, bebizonyítható, hogy az SSOR teljesen konzisztens. Ha A valós szimmetrikus pozitív diagonál elemű, akkor tetszőleges valós ω -ra ρ_{ω} sajátértékei valósak és nem negatívak. Ha $0 < \omega < 2$ és A pozitív definit, akkor $S(f_{\omega}) < 1$. Fordítva, ha $S(f_{\omega}) < 1$, akkor $0 < \omega < 2$ és A pozitív definit.

Tétel:

Ha A pozitív definit és $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ alakú, ahol D_1

D_2 négyzetes diagonál mátrixok, akkor

$$S(\mathcal{L}_\omega) \leq 1 - \frac{1}{2}\omega^2(2-\omega)^2(1-\tilde{\mu})^2$$

kivéve, ha $\omega=1$. Ekkor $S(\mathcal{L}_\omega) > S(\mathcal{L}) = \tilde{\mu}^2$

Ebben az esetben az SSOR módszer még optimális ω -val sem jobb, mint a GS módszer, sőt még több munkát igényel iterációnként, ezért nem előnyös a használata.

Az SSOR módszer konvergenciáját szemi-iterációval és blokkositással gyorsíthatjuk, így használata előnyösebb.

7. A nemszimmetrikus SOR módszer /USSOR/

Az USSOR módszert a következő iterációs séma definiálja:

$$u^{(n+\frac{1}{2})} = \mathcal{L}_\omega u^{(n)} + (I - \omega L)^{-1} c$$

$$u^{(n+1)} = \mathcal{U}_\omega u^{(n+\frac{1}{2})} + (I - \tilde{\omega} U)^{-1} \tilde{\omega} c \quad \text{vagy}$$

$$u^{(n+1)} = \mathcal{T}_{\omega, \tilde{\omega}} u^{(n)} + (\omega + \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}) (I - \tilde{\omega} U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} \omega c$$

ahol

$$\tau_{\omega, \tilde{\omega}} = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega = I - (\omega - \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}) (I - \tilde{\omega} U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} D^{-1} A$$

Ha $\omega + \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega} \neq 0$ és $I - \mathcal{T}_{\omega, \tilde{\omega}}$ nonszinguláris, akkor az USSOR módszer teljesen konzisztens.

Ha A pozitív definit és $0 < \omega < 2$ és $0 < \tilde{\omega} < 2$, akkor S

$S(\tau_{\omega, \tilde{\omega}}) < 1$. Ha $S(\tau_{\omega, \tilde{\omega}}) < 1$, akkor $0 < \omega + \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega} < 2$.

Ha A valós szimmetrikus és $(*)$ alaku pozitív diagonál elemű, akkor $\tau_{\omega, \tilde{\omega}}$ sajátértékei ugyanazok, mint $\mathcal{L}_{\hat{\omega}}$ -é, ahol

$\hat{\omega} = \omega + \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega}$. Ha A pozitív definit és $0 < \hat{\omega} < 2$, akkor $S(\tau_{\omega, \tilde{\omega}}) < 1$.

Ha $S(\tau_{\omega, \tilde{\omega}}) < 1$, akkor viszont A pozitív definit és $0 < \hat{\omega} < 2$.

ω és $\tilde{\omega}$ optimális értékének ki kell elégíteni a

$\omega + \tilde{\omega} - \omega \tilde{\omega} = \omega_b$ -t és ebben az esetben $S(\tau_{\omega, \tilde{\omega}}) = \omega_b - 1$.

Mivel az USSOR módszer iterációnként kétszer több munkát kíván, mint a SOR és a konvergencia gyorsaság sem jobb, ezért az USSOR módszer csak elméleti érdekességű, ha A $(*)$ alaku.

Ahogy a SOR módszerhez megalkották a szimmetrikus és nemszimmetrikus SOR módszert, ugyanugy az MSOR módszerhez is lehet hasonló módszereket konstruálni. Így kapjuk az SMSOR és az UMSOR módszert. A kimondható tételek analógok az SSOR és az USSOR vizsgálatánál állítottakkal. Az SMSOR-ra igaz, hogy nem érhető el jobb konvergencia sebesség, mintha \mathcal{L}_{ω_b} -t tekintenénk.

Szemiiteratív módszert használva sem lehet gyorsítani a konvergenciát ha az összes sajátérték valós.

Az USMSOR módszer szintén csak elméleti érdekességű.

Az SSOR módszer először 1955-ben Sheldon vizsgálta. Ez ál-

talánosítása az Aitken által 1950-ben javasolt módszernek, ami ekvivalens az SSOR-ral $\omega=1$ esetén. Sheldon vizsgálta az SSOR gyorsítását szemi-iteratív módszerrel.

8. Peacman Rachford módszer. /PR/

A lineáris stacionáris módszerek közül utoljára a PR módszert ismertetjük. Ez a módszer egy nagyobb iterációs csoport a "változó irány módszer /ADI/" témakörébe tartozik, ennek speciális esete. Az $Au=b$ lineáris egyenletrendszer A nonsinguláris mátrixát szintén felbontjuk három mátrix összegére:

$A = H_0 + V_0 + \Sigma$, ahol Σ nemnegatív diagonálu mátrix, H_0, V_0, Σ kielégíti a következő tulajdonságokat:

(a) $H_0 + \theta \Sigma + \rho I$ és $V_0 + \rho I$ nonsinguláris minden $\theta \geq 0$ és $\rho > 0$ -ra.

(b) Tetszőleges s és t vektorokra és $\theta \geq 0$ $\rho > 0$ -ra van "kényelmes" x, y megoldása az

$$\begin{aligned} (H_0 + \theta \Sigma + \rho I) x &= s & (V_0 + \theta \Sigma + \rho I) y &= t \end{aligned} \quad (8.1)$$

rendszernek.

Az (8.1) megoldását akkor nevezzük "kényelmes"-nek, ha a megoldáshoz szükséges munka kicsi az $Au=b$ megoldásához szükséges munkához viszonyítva. /

(8.1)-t a következő alakban lehet írni:

$$(H_0 + \theta \Sigma + \rho I) u = b - (V_0 + (1-\theta) \Sigma - \rho I) u$$

$$(V_0 + \hat{\theta} \Sigma + \rho' I) u = b - (H_0 + (1-\hat{\theta}) \Sigma - \rho' I) u$$

A PR módszernél az $u^{(n+1)}$ vektort az $u^{(n)}$ -ből két lépésben határozzuk meg. A θ , a $\hat{\theta}$, a ρ és a ρ' -paramétereket

választva $u^{(n+\frac{1}{2})}$ és $u^{(n+1)}$ -t

$$(H_0 + \theta \Sigma + \rho I) u^{(n+\frac{1}{2})} = b - (V_0 + (1-\theta) \Sigma - \rho I) u^{(n)}$$

$$(V_0 + \hat{\theta} \Sigma + \rho' I) u^{(n+1)} = b - (H_0 + (1-\hat{\theta}) \Sigma - \rho' I) u^{(n+\frac{1}{2})}$$

meghatározhatjuk.

(b) miatt $u^{/n+\frac{1}{2}/}$ és $u^{/n+1/}$ meghatározása kényelmes.

Gyakran a ρ és ρ' paraméterek n -nel változnak. Ebben az esetben

$$\left. \begin{aligned} /H_0 + \theta \Sigma + \rho_{n+1} I / u^{(n+\frac{1}{2})} &= b - (V_0 + (1-\theta)\Sigma - \rho_{n+1} I) u^{(n)} \\ /H_0 + \hat{\theta} \Sigma + \rho'_{n+1} I / u^{(n+1)} &= b - (H_0 + (1-\hat{\theta})\Sigma - \rho'_{n+1} I) u^{(n+\frac{1}{2})} \end{aligned} \right\} (8.2)$$

Szokásos a $\theta = \hat{\theta} = 1/2$ használata.

Ha H -t és V -t a következőképp definiáljuk:

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 + \frac{1}{2}\Sigma \quad \text{és} \quad V = V_0 + \frac{1}{2}\Sigma, \text{ akkor} \\ /H + \zeta_{n+1} I / u^{/n+\frac{1}{2}/} &= b - /V - \zeta_{n+1} I / u^{/n/} \\ /V + \zeta'_{n+1} I / u^{/n+1/} &= b - /H - \zeta'_{n+1} I / u^{/n+\frac{1}{2}/} \end{aligned} \right\} (8.3)$$

Természetesen a paramétereket másképp is választhatjuk.

Wachspress 1966-ban megjelent cikkében $\theta = \hat{\theta} = 1$ -t használ.
/Nem tette fel, hogy Σ diagonálmátrix/

Ha $\Sigma = \sigma I$ ahol σ konstans, akkor θ és $\hat{\theta}$ választása lényegtelen a következő értelemben.

Ha $\hat{\rho}_{n+1} = \rho'_{n+1} + / \hat{\theta} - \frac{1}{2} / \sigma$ és $\rho'_{n+1} = \rho'_{n+1} + / \hat{\theta} - \frac{1}{2} / \sigma$,

akkor (8.2)-ből (8.3) következik. Ha ρ és ρ' n -től független, akkor a módszert stacionáris PR módszernek nevezzük. Ha viszont függnek n -től, akkor nemstacionárisnak.

Stacionáris esetben tehát $\rho_n = \rho$, $\rho'_n = \rho'$ $n = 1, 2, \dots$
Ha $I + \rho I$ és $V + \rho I$ nonsinguláris, minden $\rho > 0$ -ra, akkor a PR módszer teljesen konzisztens.

$$u^{/n+\frac{1}{2}/} \text{-t eliminálva} \quad u^{/n+1/} = \tau_{\rho, \rho'} u^{/n/} + k \text{-t}$$

kapjuk, ahol

$$T_{\rho\rho'} = (V + \rho' I)^{-1} (H - \rho' I) (H + \rho I)^{-1} (V - \rho I) \quad \text{és}$$

$$k = (\rho + \rho') (V + \rho' I)^{-1} (H + \rho I)^{-1} b$$

Mivel $T_{\rho\rho'} = I - (\rho + \rho') (V + \rho' I) (H + \rho I)^{-1} A$ következik,
hogy $(I - T_{\rho\rho'}) A^{-1} b = k$ azaz a módszer konzisztens.

Mivel $I - T_{\rho\rho'}$ nem-szinguláris, a módszer teljesen konzisztens is. Igaz a következő konvergencia tétel:

$$\text{Ha } H + \frac{1}{2}(\zeta - \rho') I \quad \text{és} \quad V + \frac{1}{2}(\rho' - \rho)$$

pozitív definit és $\rho > 0, \rho' > 0$, akkor $S(T_{\rho\rho'}) < 1$.

Ha H és V pozitív definit, akkor tetszőleges $\rho > 0$ -ra $S(T_{\rho\rho}) < 1$.

4. NEMSTACIONÁRIS LINEÁRIS ITERATIV MÓDSZER

Először vizsgáljuk a következő nemstacionáris lineáris iteratív módszert.

$$u^{(n+1)} = G_{n+1} u^{(n)} + k_{n+1} \quad n \geq 0 \quad (4.0.1)$$

$u^{(n)}$ -t kifejezve:

$$u^{(n)} = G_n u^{(0)} + \hat{k}_n \quad n \geq 0 \text{ kapjuk, ahol } (4.0.2)$$

$$G_n = G_n G_{n-1} \dots G_1 \quad \text{és}$$

$$\hat{k}_n = k_n + G_n k_{n-1} + G_n G_{n-1} k_{n-2} + \dots + G_n G_{n-1} \dots G_2 k_1$$

Általánosabb módszert az

$$u^{(n+1)} = \sum_{j=0}^m G_{n+1,j} u^{(j)} + k_{n+1} \quad n \geq 0 \text{ definiál.}$$

Ebből a (4.0.2)-t a $G_1 = G_{1,0}$,

$$G_n = G_{n,0} + Q_{n,1} G_1 + Q_{n,2} G_2 + \dots + G_{n,n-1} G_{n-1}$$

helyettesítéssel kapjuk.

Jelölje $Au = b$ megoldásainak halmazát $H(A,b)$

D e f i n i c i ó :

(4.0.2) módszert konzisztensnek nevezzük (1)-el, ha teljesül a következő feltétel:

Ha $u^{(n)} \in H(A,b)$ akkor $u^{(n')} \in H(A,b)$ minden $n' \geq n$ -re.

(4.0.2) módszer fordítottan konzisztens (1) -el, ha teljesül a következő feltétel:

Ha a (4.0.2) által definiált $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ sorozat konvergens, akkor $H(A,b)$ egy eleméhez tart.

Teljesen konzisztens a módszer, ha mindkét feltétel teljesül.

T é t e l :

Ha $A(4.O.2)$ nemstacionárius iteratív módszert $(4.O.1)$ -ből kapjuk, és minden $j = 1, 2, \dots$ -re

$u^{(n+1)} = G_j u^{(n)} + k_j \quad n \geq 0$ konzisztens, lineáris stacionáris iteratív módszert definiál, akkor a módszer konzisztens. /Ez a tétel fordítva is igaz./

T é t e l :

Ha A nonszinguláris és a $(4.O.2)$ módszer konzisztens, akkor minden n -re $\hat{k}_n = (I - G_n)^{-1} b$.

A nemstacionáris iteratív módszer konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy $\{\hat{k}_n\}$ konvergáljon és $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = O$. A gyenge konvergenciához pedig szükséges és

elegendő, hogy $\{\hat{k}_n\}$ konvergáljon és legyen olyan \hat{G} mátrix, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \hat{G}$

A következőkben néhány nemstacionáris iteratív módszert ismertetünk. Mint az előzőekből tudjuk, ezek iterációs képlete $u^{(n+1)} = G_n u + k_n$ alakú. E módszer speciális esete az un. szemi-iterációs módszer. Véve egy elsőfoku lineáris stacionáris módszert, gyakran találhatunk egy "asszociált" nemstacionáris módszert, amely gyorsabban konvergál, mint az adott módszer. Ez az asszociált módszer olyan szemi-iteratív módszerként ismert, amely az adott módszeren alapul. Látni fogjuk, hogy a szemiiterációs módszer /SI/ konstrukciója analóg a valós számok sorozatának konvergencia gyorsítására létrehozott összegezési módszerekkel. Abban az esetben, ha az adott iteratív módszer mátrixának valós sajátértékei vannak, egy nagyságrenddel javul a konvergencia, SI-t használva. Ha A pozitív definit, de nem A tulajdonságú és nem L -mátrix, akkor ez az elmélet nem alkalmazható és előfordul, hogy a módszer nem hatásos. Azonban a J , RF , vagy

GS módszeren alapuló SI mégis hatásos lehet. Tény, hogy ezek a módszerek a Richardson módszerrel együtt, amely egy lényegében egy RF módszerrel alapuló SI módszer, gyakran hatásosabb olyan esetben, amikor SOR nem az.

Olyan rendszerre, ahol az A mátrix $\begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ alakú, a ciklikus Csebisev iterációs módszer kevésbé hatásos, mint a SOR ugyanakkora spektrálrádiuszra.

Most lássuk a SI módszer általánosabb elvét:

Valós számok x_1, x_2, \dots sorozatát véve gyakran megalkotunk egy másik y_1, y_2, \dots sorozatot, un. "összegezési módszer" által úgy, hogy az új sorozat konvergáljon, amikor a régi nem és az új gyorsabban konvergáljon, mint a régi, ha a régi konvergált.

Pl. vizsgáljuk a következő sorozatot:

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

.
.
.

Könnyű belátni, hogy $\{x_i\}$ konvergál, akkor $\{y_i\}$ is konvergál, ugyanoda. Ezért az összegezési módszer reguláris. Sőt azt is látni, hogyha $\{x_i\}$ nem konvergál, akkor $\{y_i\}$ még konvergálhat. Ha $\{y_i\}$ konvergál, akkor az eredeti sorozatról azt mondjuk, hogy Cesáro összegezzhető.

Egy általánosabb összegezési módszer "háromszög tömb" együtt-együtthatóival definiálható.

$$\alpha_{00}$$

$$\alpha_{10} \quad \alpha_{11}$$

$$\alpha_{20} \quad \alpha_{21} \quad \alpha_{22}$$

.
.
.

ahol $\sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Véve az $\{x_i\}$ sorozatot, a következőképpen lehet új $\{y_i\}$ sorozatot konstruálni.

$$y_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} x_k \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ha $\alpha_{n,k} = 0$ $k < n$ -re és $\alpha_{u,n} = 1$ minden n -re, akkor visszkapjuk az eredeti sorozatot. Ha $\alpha_{n,k} = (n+1)^{-1}$ $k=0, 1, \dots, n$, minden n -re, akkor a Cesáro összegezést kapjuk.

Alkalmazzuk ezt az összegezési eljárást olyan elsőfoku lineáris iteratív módszerekre, amelyek az $Au=b$ lineáris rendszert oldják meg. Itt A nemszinguláris mátrix. Véve egy $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ sorozatot, amit egy

$$u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k \quad (4.0.3)$$

teljesen konzisztens iteratív módszer definiál és olyan $\alpha_{n,k}$ együtthatókat, amelyek kielégítik a $(*)$ feltevést, definiáljuk a

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} u^{(k)} \quad (4.0.4)$$

sorozatot.

Azt mondjuk, hogy a (4.0.4) által definiált eljárás szemi-iterációs módszer az (4.0.3) lineáris stacionáris módszerre vonatkozólag.

Vizsgáljuk egy SI módszer konvergenciáját.

Legyen $\epsilon^{(n)} = u^{(n)} - u, \eta^{(n)} = v^{(n)} - u$ ahol u az

$Au = b$ megoldása. (4.0.4)-ből

$$\eta^{(n)} = v^{(n)} - u = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} u^{(k)} - u =$$

$$= \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} u^{(k)} - u \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} (u^{(k)} - u) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} \epsilon^{(k)}$$

De mivel az (4.0.3) módszer konzisztens,

$$\varepsilon(k) = G_{\varepsilon}^k(o) \quad \text{és} \quad \eta(n) = P_n(G) \quad \varepsilon(o) = P_n(G) \quad \eta(o)$$

ahol

$$P_n(G) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} G^k$$

Ha a lineáris stacionáris iteratív módszernek megfelelő G mátrix valós sajátértékű, akkor a konvergenciát gyakran javítani lehet, alkalmas SI módszert használva. Tegyük fel először, hogy G μ sajátértéke az

$$(***) \quad \alpha \leq \mu \leq \beta < 1 \quad (4.0.5)$$

területen belül fekszik, ahol $\beta > \alpha$. Megjegyezzük, hogy nem követelmény az, hogy $S(G)$ kisebb legyen egynél, mivel α -1-nél kisebb is lehet. Később megvizsgáljuk azt az esetet ahol (4.0.5) -t pótoljuk egy gyengébb feltétellel.
/A $\beta > \alpha$ követelmény nem lényeges./

Ha $\beta = \alpha$ akkor a módszer, amit a $\beta > \alpha$ feltevésből vezetünk le,

$u^{(n+1)} = \frac{1}{1-\alpha} (G - \alpha I) u^{(n)} + \frac{1}{1-\alpha} k$ módszerre redukálódik, amely teljesen konzisztens módszer.

Legyen $z = \frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}$. Ekkor optimalizáció után a szemi-iterációs képlet

$$v^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+1}}{2 - (\alpha + \beta)} \{ [2G - (\beta + \alpha)I] v^{(n)} + 2k \} + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)}$$

$$\text{ahol} \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{2z^2}{2z^2 - 1}, \quad \rho_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{4z} \rho_n\right)^{-1} \quad (4.0.6)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

Ezt az optimális SI módszert használva egy nagyságrendnyi javítás érhető el a konvergencia gyorsításában, az

$$u^{(n+1)} = \frac{1}{2 - (\alpha + \beta)} ([2G - (\beta + \alpha)I]) u^{(n)} + 2k$$

lineáris stacionáris iteratív módszerhez viszonyítva.

(Ez legalább olyan jó, mint az alapmódszer.)

Ha A pozitív definit mátrix, akkor a J , JOR és RF módszer sajátértékei valósak, így az előzőek ezekre is alkalmazhatók. Az optimális SI módszert, amely a J , JOR és RF -en alapul $J-SI$, $JOR-SI$ és $RF-SI$ módszernek nevezzük.

1. J-SI módszer

A $J-SI$ és a $JOR-SI$ módszernél fel kell tenni, hogy a $B = I(\text{diag } A)^{-1}A$ mátrixnak van egynél kisebb valós sajátértéke. Ez a követelmény teljesül, ha A pozitív definit.

A $J-SI$ módszer konvergenciája kisebb a SOR -énál, ha az A mátrix konzisztensen rendezett.

Ha A mátrix $\begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ alakú, akkor a $J-SI$ módszert

lehet úgy módosítani, hogy megkapjuk a ciklikus Csebisev szemi-iterációs ($CSSI$) módszert és ezáltal javul a konvergencia gyorsaság. ($CSSI$ lásd később)

2. JOR-SI módszer

A JOR módszernél $B_\omega = \omega B + (1-\omega)I$ -val van megadva.

Ha A pozitív definit, akkor B sajátértékei valósak és a $\alpha \leq \mu \leq \beta < 1$ sávban fekszenek. Ezért, ha $\omega > 0, \beta_\omega \mu'$ sajátértékei az $\alpha' = \omega\alpha + 1-\omega \leq \mu' \leq \omega\beta + 1-\omega = \beta' < 1$ sávban vannak.

Az előzőek mintájára bevezetve a

$$z = \frac{2 - (\alpha' + \beta')}{\beta' - \alpha'} = \frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \quad \text{változót, amely}$$

ω -től független, az iterációs képlet

$$v^{(n+1)} = \frac{1}{z} \rho_{n+1} \left(\frac{2}{\beta - \alpha} G - \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} I \right) v^{(n)} + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)} + \\ + \frac{2\rho_{n+1}}{z(\beta - \alpha)} k \quad \text{ahol} \quad k = \omega c$$

Ez az iterációs formula független ω -tól, ezért a JOR-on alapuló optimális SI módszer azonos a J módszeren alapulóval.

3. RF-SI módszer

Az RF módszernél $R_p = I - pA$, ahol $p \neq 0$. Ha A pozitív definit, akkor A összes sajátértéke pozitív és léteznek olyan \bar{a} és \bar{b} pozitív számok, hogy az A összes v sajátértékei a $0 < \bar{a} < v < \bar{b}$ sávban vannak. Ekkor az iterációs képlet:

$$v^{(n+1)} = v^{(n-1)} + \rho_{n+1} (v^{(n)} - v^{(n-1)}) - (2\rho_{n+1} / (\bar{b} + \bar{a})) (Av^{(n)} - b)$$

Az RF-SI és a J-SI módszer azonos, ha A diagonál elemei állandók.

Ha A pozitív definit, de a diagonál elemek nem konstansok, akkor az RF-SI módszer konvergencia gyorsasága kisebb, mint a J-SI módszeré. $Au = b$ -re alkalmazva, a GRF-SI módszer konvergenciája ugyanakkora, mint az RF-SI módszeré, amit az előkészített rendszerre alkalmaztunk. A J-SI módszer pedig legalább olyan jó, mint a GRF-SI, ha A A -tulajdonságu.

A SOR módszerrel sem az RF-SI, sem a J-SI módszer konvergencia szempontból nem versenyezhet konzisztensen rendezett pozitív definit mátrixokra. Azonban, ha $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$

alaku, akkor a J-SI módszert lehet javítani. Ha A pozitív definit, de nem A -tulajdonságu /és nem L -mátrix/, akkor az RF-SI és a J-SI módszerek jobbak lehetnek a SOR-nál.

4. Richardson módszer

1910-ben Richardson megoldott lineáris egyenletrendszert a következő, róla elnevezett módszerrel, amit az

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \beta_{n+1}(Au^{(n)} - b)$$

képlet definiál, ahol β_1, β_2, \dots iterációs paraméterek. A definícióból nyilvánvaló, hogy ez nem stacionáris iteratív módszer. A Richardson módszer konzisztens, de nem szükségképpen fordítottan konzisztens. Ha A nem-szinguláris, akkor a Richardson módszer akkor és csak akkor konvergens a fejezet elején kimondott értelemben,

$$\text{ha } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (I + \beta_k A) = 0$$

belátható, hogy az $u^{(n+1)} = u^{(n)} + p(Au^{(n)} - b)$

módszeren alapuló szemi-iterációs módszer és a Richardson módszer ugyanaz. Ezért nyilvánvaló, hogy tetszőleges $p \neq 0$ -ra az optimális RF-en alapuló SI módszer legalább olyan gyors, mint a Richardson. β_1, β_2, \dots bármely választása mellett van olyan SI módszer, amelynek azonos az eredménye. Másrészt, véve az RF-en alapuló optimális szemi-iterációs módszer, tetszőleges n -re lehet választani $\beta_1^{(n)}, \dots, \beta_n^{(n)}$ -t úgy, hogy a szemi-iterációs és a Richardson módszer megegyezik az n -edik

és általában csak az n -edik iterációban.

A Richardson módszernél választani kell egy m -értéket, és $\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_m^{(m)}$ paramétereket. Ezt a periódikus nem-stacionáris módszert $G_m = \prod_{k=1}^m (1 + \beta_k^{(m)} A)$ mátrixu lineáris stacionáris módszerként tanulmányozhatjuk.

A Young által 1954-1956-ban és Warlich által 1953-ban végzett numerikus kísérletek azt mutatják, hogy a Richardson módszer a kerekítési hibákra nagyon érzékeny, főleg nagy n -re. Ezért az RF-SI módszert javasolják inkább. Nemcsak azért, mert ez a módszer kisebb kerekítési hibákat eredményez, hanem minden n -re az n -edik iterációnál ugyanazt az eredményt kapjuk, mint amit Richardson módszerrel kapnánk olyan $\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_n^{(n)}$ paraméterekkel, amelyek ehhez az n -hez vannak rendelve.

5. A ciklikus Csebisev szemiiterációs módszer /CCSI/.

A CCSI módszer, amit 1961-ben Golub és Varga vezetett be, akkor alkalmazható, ha $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ alakú, nem eltűnő diagonális mátrix és olyan, hogy a $B = I - (\text{diag} A)^{-1} A$ sajátértékei valósak és $S(B) < 1$. A CCSI módszer az MSOR módszer speciális eseteként fogható fel. Az

$$\omega_1 = 1, \omega'_1 = \frac{2}{2 - \mu^2}$$

$$\omega_k = (1 - \frac{1}{4} \omega'_{k-1} \mu^2)^{-1} \quad \omega'_k = (1 - \frac{1}{4} \omega_k \mu^2)^{-1} \quad k = 2, 3, \dots$$

paraméterválasztás esetén a CCSI -hez jutunk
A J-SI módszerből is lehet származtatni:

$$v^{(n+1)} = \rho_{n+1} (Bv^{(n)} + c) + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n)}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{-ből}$$

$$\rho_1 = 1 \quad \rho_2 = \frac{2}{2 - \mu^2} \quad \rho_{n+1} = (1 - \frac{1}{4} \mu^2 \rho_n)^{-1} \quad n = 2, 3, \dots$$

paraméterválasztás esetén kapunk CCSI módszert.

6. GSSI módszer

Ha A pozitív definit mátrix, akkor a GS módszer konvergens. Azonban ℓ sajátértékei nem szükségképpen valósak, így az optimalizációt nem lehet alkalmazni. Ilyenkor hatásosan használhatjuk a JSI vagy az RF-SI módszert.

Ha A Stieltjes mátrix, akkor mind a J , mind a GS módszer konvergens és $S(\ell) \leq S(B)$. Mégis, mivel GS sajátértékei komplexek is lehetnek, nem biztos, hogy az optimális GSSI-módszer olyan jó lesz, mint a J-SI módszer. Ha felteszünk, hogy ℓ sajátértékei valósak, még mindig nem lehetünk biztosak abban, hogy a GSSI a jobb. Mivel, míg a sajátértékek β_{GS} felső korlátja nagyobb a GS módszernél, mint a J -módszernél a β_j felső korlát, azalatt α_{GS} alsó korlát kisebb lehet, mint α_j . Másrészt ismert, hogy $\beta_j - \alpha_j \geq S(B)$ mivel B sajátértékeinek összege zéró.

Ha A konzisztensen rendezett pozitív definit mátrix, akkor a GSSI módszer majdnem olyan gyorsan konvergál, mint a SOR és majdnem kétszer olyan gyorsan, mint a JSI módszer. Ebben az esetben ℓ λ sajátértékei a $0 \leq \lambda \leq \mu^2$ sávban vannak.

$z = \frac{2}{\mu^2} - 1$ választás esetén a GSSI módszer

$$v^{n+1} = \frac{\rho_{n+1}}{1 - \frac{\mu^2}{2}} \left(\left(\alpha - \frac{\mu^2}{2} I \right) v^{(n)} + k + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)} \right)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

ahol ρ_i (4.0.6)-gal van adva.

7. GS-SSI módszer

Ha A konzisztensen rendezett és a természetes rendezést használjuk a vörös-fekete helyett, akkor az L Jordan féle kanonikus alakja nem lesz diagonális és így a konvergencia nem elég jó. A GS-SSI -nél és a GS-SI -nél vörös-fekete rendezést használva gyorsabb lesz a konvergencia.

8. SOR-SI módszer

Ha $\omega > 1$, akkor a SOR módszer sajátértékei általában nem mind valósak. Bebizonyítható, hogy az $L\omega_b$ -n alapuló optimális szemiiteratív módszer azonos az alaplómódszerrel.

9. MSOR-SI módszer

Tegyük fel, hogy A pozitív definit és $\begin{pmatrix} D_1 & H \\ K^1 & D_2 \end{pmatrix}$ alakú.

A módszer vizsgálata során kiderült, hogy az MSOR módszer alapuló optimális szemiiterációs módszer nem jobb, mint a közönséges SOR ω_b fix paraméterrel.

Nyilvánvaló, hogy a J-SI és az RF-SI módszer kb. fele olyan gyors, mint a GS-SSI módszer. A GS-SSI módszer és a CCSI módszer a legjobb ha $D^{\frac{1}{2}}$ és $A^{\frac{1}{2}}$ normát figyeljük.

Young és Kincaid 1969-ben összehasonlította a GS-SSI és CCSI módszert D , illetve A normára vonatkozólag. Azt kapták, hogy a $D^{\frac{1}{2}}$ normában a CCSI módszer a jobb, az $A^{\frac{1}{2}}$ normában viszont a GS-SSI módszer jobb egy kicsit.

Varga 1957-ben vizsgálta a GS-SI módszert és belátta, hogy a konvergenciája kb. ugyanolyan gyors, mint a SOR-é. Tee, Young és Kincaid megmutatták, hogy természetes rendezés esetén a GS-SI módszer konvergenciája nagyon lassu lehet.

10. SSOR-SI módszer

Akkor alkalmazható, ha S_ω λ sajátértékei valósak és

$$0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda} = S(\mathcal{L}_\omega)$$

iterációs képlete:

$$v^{(n+1)} = \frac{\rho_{n+k}}{1 - \frac{1}{2} \bar{\lambda}} \{ (\rho_\omega - \frac{1}{2} \bar{\lambda} I) v^{(n)} + k \} + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)} \quad n=0,1,2,$$

ahol

$$\rho_\omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega) I)$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{2z^2}{2z^2 - 1}, \quad \dots \quad \rho_{n+1} = (1 - \frac{1}{4z^2} \rho_n)^{-1} \quad n=2,3,\dots$$

$$z = \frac{2}{\bar{\lambda}} - 1$$

Itt:

$$k = \omega(2 - \omega)(I - \omega U)^{-1}(I - \omega L)^{-1}c$$

5. MÁSODFOKU ITERATIV MÓDSZEREK

Vizsgáljuk a

$$u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + Hu^{(n-1)} + k$$

másodfoku lineáris, stacionáris módszert, ahol $u^{(0)}$ és $u^{(1)}$ tetszőleges.

Ha az így definiált sorozat konvergál egy \hat{u} határértékhez, ennek a határértéknek ki kell elégíteni az $u = Gu + Hu + k$ kapcsolt egyenletet.

Ha valamely n -től kezdve teljesül, hogy $u^{(n-1)} = u^{(n)} = \bar{u}$
 $Au = b$ rendszer egzakt megoldása.

A konzisztencia feltétele az, hogy

$$(I-H-G)A^{-1}b = k \quad (5.1)$$

teljesüljön. A módszer teljesen konzisztens, ha $I-G-H$ nonszinguláris és (5.1) teljesül.

Golub és Varga 1961-ben a következő egyenletrendszert vizsgálta:

$$\begin{pmatrix} u^{(n)} \\ u^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Tudjuk, hogy a konvergencia szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $u^{(0)}$ és $u^{(1)}$ -ra

$$S(\hat{G}) < 1, \quad \text{ahol}$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ H & G \end{pmatrix}$$

Tétel: Az $S(\hat{G}) < 1$ akkor és csak akkor, ha

$\det(\lambda^2 I - \lambda G - H) = 0$ összes λ gyöke egynél kisebb abszolút értékű.

Tekintsünk egy elsőfajú lineáris stacionáris módszert.

$$u^{(n+1)} = G_1 u^{(n)} + k_1 \quad \text{és egy másodfajut}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + d(u^{(n)} - u^{(n-1)}) + e(G_1 u^{(n)} + k_1 - u^{(n)}) \quad (5.2)$$

Ezek teljesen konzisztensek, tetszőleges d és $e \neq 0$ konstansra. Megjegyezzük, hogy (5.2) megegyezik a

$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + (\rho_{n+1} - 1)(v^{(n)} - v^{(n-1)}) + \frac{2\rho_{n+1}}{2 - (\alpha + \beta)} (G_1 v^{(n)} + k_1 - v^{(n)})$$

szemiiteratív módszerrel, ha d helyébe $(\rho_{n+1} - 1)$ -t és e helyébe $\frac{2\rho_{n+1}}{2 - (\alpha + \beta)}$ -t írunk. Mivel $G = (1 - e + d)I$ és $H = -dI$, a konvergenciafeltétel a

$$\det(\lambda^2 I - \lambda(eG_1 + (1 - e + d)I) + dI) = 0 \quad \text{-ba megy át.}$$

Innen

$$\det \left(G_1 + \left(\frac{1 - e + d}{e} \right) I - \left(\frac{\lambda^2 + d}{e\lambda} \right) I \right) = 0$$

\hat{G} λ sajátértéke és \hat{G}_1 μ sajátértéke között fennáll a

$$\mu + \frac{1 - e + d}{e} = \frac{\lambda^2 + d}{e\lambda} \quad \text{összefüggés.}$$

A $\lambda = \rho e^{i\theta}$ kör képe a

$$\frac{\left(\operatorname{Re} \mu + \left(\frac{1 - e + d}{e} \right) \right)^2}{\left(\frac{1}{e} \left(\rho + \frac{d}{\rho} \right) \right)^2} + \frac{(\operatorname{Im} \mu)^2}{\left(\frac{1}{e} \left(\rho - \frac{d}{\rho} \right) \right)^2} = 1 \quad \text{ellipszis.}$$

Mint már láttuk, ha G μ sajátértékei az $\alpha \leq \mu \leq \beta \leq 1$ intervallumban fekszenek, akkor d és e optimális választás esetén kielégíti az alábbi feltételeket: $\rho^2 = d$

$$\frac{e - 1 - d}{e} = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \frac{2\rho}{e} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Ebből

$$\frac{((\beta-\alpha)(1+\rho^2))}{2-(\beta+\alpha)} = 2\rho$$

Legyen $\sigma = (\beta-\alpha) / (2-(\beta+\alpha))$, akkor az előző egyenlet:

$$\sigma(1-\rho^2) = 2\rho \quad \text{és így} \quad 1+\rho^2 = \hat{\omega}_b = 2 / (1+\sqrt{1-\bar{\tau}^2})$$

$$\text{Ezért} \quad d = \hat{\omega}_b - 1,$$

$$e = \frac{2\hat{\omega}_b \bar{\tau}}{\beta-\alpha} = \frac{2\hat{\omega}_b}{2-(\beta+\alpha)}$$

Ha $\hat{r} = \hat{\omega}_b - 1$ jelölést bevezetjük, akkor

$$s(\hat{G}) = \rho = (\hat{\omega}_b - 1)^{\frac{1}{2}} = \hat{r}^{\frac{1}{2}},$$

innen következik, hogy másodfajú iteratív módszert használva, tetszőleges olyan iteratív módszer konvergenciája gyorsítható, aminek egynél kisebb valós sajátértékei vannak. A konvergencia gyorsítás hasonló nagyságrendű, mint ami optimális szemiiteratív módszer használatával elérhető.

Pl. ha A A -tulajdonságu pozitív definit mátrix és $G_1 = B$, akkor $\beta = -\alpha = \bar{\mu} = s(B)$, $\bar{\tau} = \bar{\mu}$ és $\hat{\omega}_b = \omega_b =$

$$= 2 / \{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}\}$$

$$s(\hat{G}) = \sqrt{\hat{\omega}_b - 1} \text{ -ből kapjuk: } s(\hat{G}) = (\omega_b - 1)^{\frac{1}{2}}$$

Ebből látjuk, hogy A konzisztensen rendezett, akkor a másodfajú J módszer konvergenciája fele olyan gyors, mint a SOR módszeré. Ha A pozitív definit és konzisztensen rendezett és $G_1 = I$ a GS módszernek megfelelően, akkor kapjuk, hogy $\beta = \bar{\mu}^2$, $\alpha=0$ és $\sigma = \bar{\mu}^2 / (2-\bar{\mu}^2)$

Ezért

$$\hat{\omega}_b = \frac{2}{1+(1-\bar{\sigma}^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \left(\frac{\bar{\mu}}{1+(1-\bar{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^4 = 1 + (\omega_b - 1)^2$$

$$\text{és } S(G) = \omega_b - 1$$

Ebből látható, hogy a másodfajú GS módszer konvergenciája kb. ugyanakkora, mint a SOR módszeré.

Ha A pozitív definit és $G_1 = \mathcal{L}_\omega$ az SSOR módszernek megfelelő mátrix, akkor $\beta = \bar{\lambda} = S(\mathcal{L}_\omega)$, $\alpha = 0$ és $\sigma = \frac{\bar{\lambda}}{2-\bar{\lambda}}$

$$\text{Ezért } \hat{\omega}_b = \frac{2}{1+(1-\bar{\tau}^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \left(\frac{\bar{\lambda}^{\frac{1}{2}}}{1+(1-\bar{\lambda})^{\frac{1}{2}}} \right)^4 \quad (5.3)$$

$$\text{és } S(\hat{G}) = \sqrt{\hat{\omega}_b - 1} = (\bar{\lambda}^{\frac{1}{2}} / (1+\sqrt{1-\bar{\lambda}}))^4$$

Ha $\bar{\lambda}$ lényegesen kisebb $\bar{\mu}^2$ -nél, akkor a másodfajú SSOR módszer konvergenciája jóval nagyobb, mint a SOR módszeré.

Ha $u^{(1)}$ -t speciálisan választjuk, akkor pontosabb becslést adhatunk a másodfajú módszerek konvergencia tulajdonságára és egy közvetlenebb összehasonlítást a megfelelő szemiiteratív módszerekkel.

A szemiiteratív módszernél

$$u^{(1)} = \frac{1}{2-(\beta+\alpha)} \{ (2G_1 - (\beta+\alpha)I)u^{(0)} + 2k_1 \}$$

$$\text{Ha } G' = \frac{2}{2-(\beta+\alpha)} G_1 - \frac{\beta+\alpha}{2-(\beta+\alpha)} I \quad \text{jelölést bevezetjük,}$$

akkor $n = 1, 2, \dots$ -ra

$$u^{(n+1)} = \hat{\omega}_b G' u^{(n)} + (1 - \hat{\omega}_b) u^{(n-1)} + \frac{2\hat{\omega}_b}{2 - (\beta + \alpha)} k_1,$$

kapjuk

$$u^{(n+1)} - \bar{u} = Q_n(G')(u^{(0)} - \bar{u})$$

ahol \bar{u} az $Au = b$ egyenlet egzakt megoldása. A $Q_n(G')$ polinomok kielégítik a

$$Q_0(G') = I \quad Q_1(G') = G'$$

$$Q_{n+1}(G') = \hat{\omega}_b G' Q_n(G') + (1 - \hat{\omega}_b) Q_{n-1}(G')$$

rekurrens egyenleteket.

Mivel $G' \gamma$ sajátértékei a

$$-\bar{\sigma} = -\frac{\beta - \alpha}{2 - (\beta + \alpha)} \leq \gamma \leq \frac{\beta - \alpha}{2 - (\beta + \alpha)} = \bar{\sigma} \quad \text{szakaszon vannak}$$

$$\text{következik, hogy } \max_{-\bar{\sigma} \leq \gamma \leq \bar{\sigma}} |Q_n(\gamma)| = Q_n(\bar{\sigma}) = \frac{2\hat{r}^{\frac{n}{2}}}{1 + \hat{r}} \left(1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)(1 - \hat{r})\right)$$

$$\text{ahol } \hat{r} = \hat{\omega}_b - 1.$$

$$\text{Igy } \bar{S}(Q_n(G')) = \frac{2\hat{r}^{\frac{n}{2}}}{1 + \hat{r}} \left\{1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)(1 - \hat{r})\right\}, \text{ viszont } \bar{S}(P_n(G)) = \frac{2\hat{r}^{\frac{n}{2}}}{1 + \hat{r}^n}$$

â megfelelő szemiiteratív módszerrel.

A Csebisev polinomok elméletéből ismert, hogy

$\bar{S}(P_n(G)) \leq \bar{S}(Q_n(G'))$. Így a szemiiteratív módszer konvergenciája gyorsabb, mint a másodfajú módszeré. Ez várható is volt, mivel a másodfajú módszernél $Q_n(G')$ rekurrens relációnak konstans az együtthatója, míg a szemiiteratív módszer változó együtthatókat használ.

A másodfajú J módszert pozitív definit és A tulajdonságu A mátrix esetén

$$u^{(1)} = Bn^{(0)} + c$$

$$u^{(n+1)} = \omega_b B u^{(n)} + c + (1 - \omega_b) u^{(n-1)} \quad \text{alakban írhatjuk}$$

fel. A másodfajú GS módszer pozitív definit és konzisztensen rendezett A mátrix esetén

$$u^{(1)} = \frac{1}{2 - \bar{\mu}^2} \{ (2\bar{\ell} - \bar{\mu}^2 I) u^{(0)} + 2(I - L)^{-1} c \} \quad (5.4)$$

$$u^{(n+1)} = \hat{\omega}_b \left\{ \left(\frac{2}{2 - \bar{\mu}^2} \bar{\ell} - \frac{\bar{\mu}^2}{2 - \bar{\mu}^2} I \right) u^{(n)} + \frac{2}{2 - \bar{\mu}^2} (I - L)^{-1} c \right\} + (1 - \hat{\omega}_b) u^{(n-1)}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

alaku, ahol $\hat{\omega}_b = \frac{2}{1 + (1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$

Másodfajú SSOR módszerre pozitív definit A-ra ugyanazt a formulát kapjuk, mint (5.4) csak $\bar{\mu}^2$ helyébe $\bar{\lambda} = S(\bar{\ell}_\omega)$ -t kell írni, és $\hat{\omega}_b$ -t (5.3) adja meg.

Rilly 1954-ben vizsgálta azt az esetet, amikor $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$

alaku. Ekkor egy "összenyomást" lehet alkalmazni és így feleannyit kell számolni. Ezen az úton egy új módszert kapunk a másodfajú J módszerből, ami ugyanaz, mint a módosított Sheldon módszer.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy Abramov szovjet matematikus már 1950-ben kidolgozott egy, a másodfajú J módszerrel azonosnak tekinthető módszert, amivel már akkor 130 egyenletből álló rendszert oldott meg.

Azoknak a szerzőknek a dolgozatai, akikre Young hivatkozik, a következő sorrendben jelentek meg:

1950: Frankel, 1954: Rilly, 1961: Golub és Varga, 1971: Yuong

6. BLOKKITERATIV MÓDSZEREK

Az idáig ismertetett iterációs módszerek közös vonása az, hogy minden iterációban N egyenletből álló rendszert vizsgáltunk. Ezeket a módszereket pontiterativ módszereknek nevezzük. Csoportosíthatjuk azonban az egyenleteket úgy, hogy mindegyik egy és csak egy csoportba tartozzon. Az egyenletcsoporthoz vagy másnéven blokkhoz ugyanannyi ismeretlent rendelhetünk, mint ahány egyenlet tartozik bele és minden ismeretlent hozzárendeljük valamelyik csoporthoz. A módszer abban áll, hogy egy csoportba tartozó egyenleteket megoldjuk a hozzájuk rendelt ismeretlenekre, miközben a többi ismeretlen adott. Pontosítsuk a fentieket:

Blokkiterativ módszer konstruálásához az első lépés az első N egész szám csoportosítása úgy, hogy minden egész egy és csak egy csoportba tartozzon. Feltesszük, hogy a csoport rendezett.

D e f i n i c i ó :

$W = \{1, 2, \dots, N\}$ egy \mathbb{I} rendezett csoportja a W -nek egy olyan R_1, \dots, R_q diszjunkt részhalmazokra bontása, amely olyan, hogy $R_1 + \dots + R_q = W$. A W \mathbb{I} és \mathbb{I}' rendezett csoportja, amit R_1, \dots, R_q és R'_1, \dots, R'_q definiál azonos, ha $q = q'$ és $R_1 = R'_1, \dots, R_q = R'_q$. R_1, \dots, R_q részhalmazokat csoportként emlegetjük, bár nincs köztük a matematikai értelemben vett csoporthoz/.

Véve egy A mátrixot és egy \mathbb{I} rendezett csoportot, definiálhatjuk az $A_{r,s}$ mátrixot $r, s = 1, 2, \dots, q$ -ra a következőképpen: $A_{r,s}$ úgy keletkezik A -ból, hogy R_r -nek megfelelő sorait és R_s -nek megfelelő oszlopait töröljük.

Véve egy u oszlopvektort, definiáljuk az u_1, \dots, u_q oszlopvektorokat: U_r az u -ból úgy keletkezik, hogy az u R_r -nek megfelelő elemeit töröljük. Hasonlóan definiáljuk a B_1, \dots, B_q oszlopvektorokat, amiket a b oszlopvektorból származtatunk.

Igy az $Au = b$ rendszer $\sum_{s=1}^q A_{r,s} U_s = B_r \quad r = 1, 2, \dots, q$

alakban írható. Feltéve, hogy $A_{r,r}$ nem szinguláris, a következő csoport-iteratív módszereket definiálhatjuk:

I/1. Jacobi blokkiterációs módszert az alábbi képlet definiálja:

$$A_{r,r} U_r^{(n+1)} + \sum_{s=1}^q A_{r,s} U_s^{(n)} = B_r \quad r = 1, 2, \dots, q$$

vagy ami vele ekvivalens:

$$U_r^{(n+1)} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^q B_{r,s} U_s^{(n)} + C_r \quad r = 1, 2, \dots, q$$

ahol

$$B_{r,s} = \begin{cases} -A_{r,r}^{-1} A_{r,s} & , \text{ ha } r \neq s \text{ és } C_r = A_{r,r}^{-1} B_r \\ 0 & , \text{ ha } r = s \end{cases}$$

I/2. GS blokkiterációs módszer

$$A_{r,r} U_r^{(n+1)} + \sum_{s=1}^{r-1} A_{r,s} U_s^{(n+1)} + \sum_{s=r+1}^q A_{r,s} U_s^{(n)} = B_r$$

$$r = 1, 2, \dots, q$$

vagy

$$u^{(n+1)} = \mathcal{L}^{(\mathbb{I})} u^{(n)} + (\mathbb{I} - L^{(\mathbb{I})})^{-1} C^{(\mathbb{I})} \quad \text{ahol}$$

$$\mathcal{L}^{(\mathbb{I})} = (\mathbb{I} - L^{(\mathbb{I})}) U^{(\mathbb{I})}, \quad L^{(\mathbb{I})} = (D^{(\mathbb{I})})^{-1} C_L^{(\mathbb{I})},$$

$$U^{(\Pi)} = (D^{(\Pi)})^{-1} C_u^{(\Pi)}$$

$C^{(\Pi)} = (D^{(\Pi)})^{-1} b$, $D^{(\Pi)} = \text{diag}_{\Pi} A$: ez A-ból úgy keletkezik, hogy 0-t írunk minden olyan a_{ij} elem helyére, ahol i és j nem ugyanabban a csoportban van.

$C_L^{(\Pi)}$ és $C_u^{(\Pi)}$ A-ból úgy keletkezik, hogy 0-val pótoljuk a minden olyan a_{ij} elemét, ahol i és j különböző csoportban van és olyan, hogy az i -t tartalmazó csoport közvetlenül követi vagy megelőzi a j -t tartalmazó csoportot.

I/3. A JOR és SOR blokkiterációs módszer

A JOR blokkiterációs séma:

$$u^{(n+1)} = B_{\omega}^{(\Pi)} u^{(n)} + \omega C^{(\Pi)}$$

A SOR blokkiterációs séma:

$$u^{(n+1)} = L_{\omega}^{(\Pi)} u^{(n)} + (I - \omega L^{(\Pi)})^{-1} \omega C^{(\Pi)}$$

ahol

$$B_{\omega}^{(\Pi)} = \omega B^{(\Pi)} + (1-\omega) I, \quad B^{(\Pi)} = (D^{(\Pi)})^{-1} C^{(\Pi)},$$

$$C^{(\Pi)} = D^{(\Pi)} - A \quad \text{és} \quad L_{\omega}^{(\Pi)} = (I - \omega L^{(\Pi)})^{-1} (\omega U^{(\Pi)} + (1-\omega) I)$$

A blokkiterációs módszer "alapkérdése" egy $Qw=r$ (I.3.1) egyenletrendszer megoldása, ahol Q egy adott mátrix és v adott vektor. Ez különböző módszerekkel /első-

sorban direkt módszerrel/ történhet. Általában Gauss eliminációt használnak. Abban a speciális esetben, amikor a Q tridiagonális, a Gauss eliminációnál gyorsabb, a speciális adottságot jobban figyelembe vevő módszereket használhatunk.

Thomas /1949/ algoritmus a következő:

Írjuk a (I.3.1) rendszert

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots A_M B_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_M \end{pmatrix} \quad \text{alakban}$$

Könnyű igazolni, hogy ω_i -t a következő módon kaphatjuk meg:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= q_i - b_i \omega_{i+1} \\ \omega_M &= q_M \end{aligned} \right\} \quad i = M-1, M-2, \dots, 1 \quad \text{ahol}$$

$$b_1 = \frac{C_1}{B_1} \quad b_i = \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, M$$

$$q_1 = \frac{D_1}{B_1} \quad q_i = \frac{D_i - A_i q_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, M$$

Ez a módszer alkalmazható, ha

$$B_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$B_1 > |C_1|$$

$$B_i \geq |C_i| + |A_i|, \quad |C_i| \neq 0, \quad |A_i| \neq 0 \quad i = 2, 3, \dots, M-1$$

$$B_M \geq |A_M|$$

Egy másik módszert 1974-ben Malcom és Palmer dolgozott ki, valós szimmetrikus diagonál domináns tridiagonális mátrixokra. /Lásd: (22)/

Tridiagonális egyenletrendszer megoldása nyilván sokkal kevesebb munkával jár, mintha a Q mátrixnak kevés a nulla eleme. Most leírunk egy eljárást, amit Cuthill és Varga 1959-ben dolgozott ki arra az esetre, amikor Q pozitív definit. $Q\omega = v$ megoldását lényegében ugyanakkora munkával kapja meg, mint amikor Q diagonális. Ez egy bevezető műveletet követel meg, de ez általában nem nagyon növeli a munkát, mivel sok azonos Q mátrixu egyenletet oldunk meg.

Illusztráljuk az eljárást a következő feladat vizsgálatával:

Legyen

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Keresünk egy olyan D diagonál mátrixot és egy T bidiagonális mátrixot,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & 0 \\ 0 & 1 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{hogy} \quad Q = DT^T D.$$

Beláthatjuk, hogy ekkor

$$d_1 = \sqrt{b_1} \quad d_k = \sqrt{b_k - \left(\frac{c_{k-1}}{d_{k-1}} \right)^2} \quad \begin{matrix} k = 2, 3 \\ k = 1, 2 \end{matrix}$$

$$c_k = \frac{c_k}{d_k d_{k+1}} \quad k = 1, 2$$

Igazolható, hogy mivel M pozitív definit, minden d_k valós és pozitív, így az eljárás alkalmazható.

$$DT^T D \omega = v \quad \text{vagy} \quad T^T T(D\omega) = D^{-1} v$$

$$\text{Legyen } z = D\omega, \quad y = Tz, \quad \text{akkor} \quad T^T y = D^{-1} v = s$$

Ezt megoldva:

$$y_1 = s_1$$

$$y_2 = s_2 - e_1 y_1$$

$$y_3 = s_3 - e_2 y_2$$

$$Tz = y \quad \text{-t megoldva:}$$

$$z_3 = y_3$$

$$z_2 = y_2 - e_2 z_3$$

$$z_1 = y_1 - e_1 z_2$$

$$z = D\omega \text{-t megoldva:}$$

$$\omega_1 = \frac{z_1}{d_1}$$

$$\omega_2 = z_2 / d_2$$

$$\omega_3 = z_3 / d_3$$

A gyakorlatban z_i -vel dolgozunk, és mikor látjuk, hogy az eljárás konvergens, csak akkor számoljuk ki a z -hez ω -t.

Blokkiterációs módszernél, ha A pozitív definit, akkor minden $A_{r,r}$ pozitív definit, és D_r -t és T_r -t a fenti leírt módon határozzuk meg.

U_r keresése helyett egy $V_r = D_r U_r$ -t keresünk. D_r -t és T_r -t ki tudjuk számítani, meghatározhatjuk V_r komponenseit minden iterációban $2m$ szorzással, ahol m a D_r rangja.

Blokk-J, -GS és -SOR módszernél a ráfordított munka iterációként kb. ugyanakkora, mint a megfelelő pont módszernél. A konvergencia gyorsaság viszont lényegesen nagyobb lehet.

II. Konvergencia analízis:

A J, GS és a SOR blokkiterációs módszerek konvergenciáját tanulmányozzuk. Hasonló relációk igazak $L_{\omega}^{(\mathbb{N})}$ és $B^{(\mathbb{N})}$ sajátértékei között, mint L és B sajátértékei között. Legyen adva egy A mátrix és egy q darab-
ból álló \mathbb{N} rendezett csoport. Definiáljuk a $z = (z_{r,s})$ mátrixot:

$$z_{r,s} = \begin{cases} 0 & \text{ha } A_{r,s} = 0 \\ 1 & \text{ha } A_{r,s} \neq 0 \end{cases}$$

Definíció:

Az A mátrixot $A^{(\mathbb{N})}$ -tulajdonságúnak nevezzük, ha z A tulajdonságu.

Definíció:

Az A mátrixot \mathbb{N} konzisztensen rendezett mátrixnak / \mathbb{N} -CO mátrix/ nevezzük, ha z konzisztensen rendezett.

D e f i n i c i ó :

Az A mátrix általánosan η konzisztensen rendezett mátrix (η -GCO), ha $\Delta = \det(\alpha C_L^{(\eta)} + \alpha^{-1} C_U^{(\eta)} - k D^{(\eta)})$ α -tól független minden $l \neq 0$ -ra és minden k -ra.

T é t e l :

Ha A pozitív definit, akkor - mint a SOR módszernél l és B sajátértékei között - $\omega^{(\eta)}$ és $B^{(\eta)}$ sajátértékei között fennáll az alábbi (III.1) összefüggés.

Mivel minden $A_{r,r}$ is pozitív definit, következik, hogy

$$B^{(\eta)} \text{ hasonló egy } \tilde{B}^{(\eta)} = (D^{(\eta)})^{\frac{1}{2}} B^{(\eta)} (D^{(\eta)})^{\frac{1}{2}}$$

szimmetrikus mátrixhoz. Mivel $B^{(\eta)}$ A -tulajdonsága,

$A = D^{(\eta)} - D^{(\eta)} B^{(\eta)}$ miatt és mivel

$$(D^{(\eta)})^{\frac{1}{2}} A (D^{(\eta)})^{\frac{1}{2}} = I - \tilde{B}^{(\eta)} \text{ pozitív definit, következik,}$$

hogy $\bar{\mu}^{(\eta)} = S(B^{(\eta)}) < 1$.

$\bar{\mu}^{(\eta)}$ -ből meghatározhatjuk az optimális $\omega_b^{(\eta)}$ relaxációs faktort.

$$\omega_b^{(\eta)} = \frac{2}{1 + (1 - (\bar{\mu}^{(\eta)})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

és

$$S\left(\omega_b^{(\eta)}\right) = \omega_b^{(\eta)} - 1 \quad (\text{III.1})$$

A J, GS és SOR blokkiterációt parciális differenciálegyenletek megoldásánál úgy célszerű felhasználni, hogy a rácsháló egy során levő pontokhoz tartozó differenciálegyenleteket soroljuk egy blokkba. Ezt a speciális csoportosítással keletkező iterációt vonaliterációnak nevezzük.

A J, GS és SOR vonaliteráció konvergencia-sebességéről elmondhatjuk, hogy a GS vonaliteráció kétszer olyan gyors, mint a J vonaliteráció. SOR vonaliterációnál

$$\omega_b^{(1)} = \frac{2}{1+(1-S(B^{(1)}))^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{relaxációs faktort használ-}$$

va a vonal-SOR $\sqrt{2}$ -ször olyan gyors, mint a közönséges SOR.

Míg a $\sqrt{2}$ faktor megtakarítás viszonylag szerény javulás összehasonlítva azzal a nyereséggel, amit akkor érünk el, amikor a GS módszert a SOR-ral helyettesítjük, azonban nagyon nagy problémák esetén mégis megéri a fáradságot. Természetesen olyan sémát kell használni, amit már az előbb leírtunk, hogy a (ráfordított munka / iteráció) ne legyen nagyobb, mint pontiterációnál.

A két-egyenes iteratív módszer \mathbb{I}_2 rendezett csoportot használ, ahol R_1 megfelel a két első rácssoron levő pontoknak, R_2 pedig a harmadik-negyediknek, stb. Be lehet látni, hogy az A \mathbb{I}_2 -CO mátrix, ezért

ugyanolyan relációk vannak $\mathbb{I}_2^{(1)}$ és $B^{(1)}$ illetve $\mathbb{I}_2^{(2)}$ és $B^{(2)}$ sajátértékei között. Ha A pozitív defi-

nit, akkor $\mu^{(1)} = S(B^{(1)}) < 1$ és ω optimális értékét a fenti módon kaphatjuk meg. Varga 1960-ban megmu-

tatta, hogy a két-egyenes SOR módszernél $\omega_b^{(1)}$ -val a konvergencia sebesség kb. kétszerese mint ω_b -t használva.

Parter 1961-ben belátta, hogy a k -egyenes SOR módszer optimális ω -val $\sqrt{2k'}$ -szor olyan gyorsan konvergál, mint ω_b esetén. Természetesen bonyolultabb egyenletrendszereket kell megoldani minden iterációban.

1960-ban Varga megmutatta, hogy a faktorizációs technikát alkalmazva /ez hasonló a 3.2-ben leírtakhoz/, -ha A pozitív definit, - egy 5 diagonális rendszert két egyenes SOR-ral megoldva, a munka/iteráció lényegében ugyanakkora, mint pont-SOR-nál.

A pont és blokk-iterációs módszerek összehasonlítása

Igazak az alábbi tételek:

Ha A M-mátrix, akkor $S(\mathcal{L}^{(\Pi)}) \leq S(\mathcal{L})$

ha A Stieltjes mátrix, és Π -GCO mátrix, akkor

$\mu^{(\Pi)} = S(B^{(\Pi)}) < 1$ és érvényes (III.1). Továbbá, mi-

vel $S(B^{(\Pi)}) \leq S(B)$, azért $\omega_b^{(\Pi)} \leq \omega_b$.

Sőt $\min_{\omega} S(\mathcal{L}_{\omega}) \geq \omega_b - 1 \geq S(\mathcal{L}_{\omega_b^{(\Pi)}}^{(\Pi)})$.

A blokk SOR módszer $\omega = \omega_b^{(\Pi)}$ -vel legalább olyan gyorsan konvergál, mint a pont-SOR tetszőleges ω -val.

7. AZ ITERATIV MÓDSZER KIVÁLASZTÁSA

Most néhány tanácsot adunk arra, hogyan válasszuk ki a megfelelő iterációs módszert az $Au = b$ egyenlet megoldására, ha az A mátrix valamilyen tulajdonsága ismert.

Tegyük fel, hogy ismerjük pontosan, vagy legalább is elég jó közelítéssel az A v sajátértékeinek \bar{a} alsó és \bar{b} felső korlátját. Ha az \bar{a} -on és a \bar{b} -on kívül más nem ismert, akkor RF módszert használhatjuk

$$p = - \frac{2}{(\bar{a} + \bar{b})}$$

paraméterrel:

$$u^{(n+1)} = \left(I - \frac{2}{\bar{a} + \bar{b}} A \right) u^{(n)} - \left(\frac{2}{\bar{a} + \bar{b}} \right) b$$

Ennek a módszernek a spektrál rádiusza:

$$S \left(I - \frac{2}{\bar{a} + \bar{b}} A \right) = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{b} + \bar{a}} < 1$$

A konvergenciát egy nagyságrenddel javítani tudjuk, ha RF-SI módszert használunk.

Ha tudjuk, hogy az A A -tulajdonságu, akkor a J-SI módszer a legjobb.

Ha A L -mátrix, akkor a GS módszert ajánlhatjuk, de mivel L sajátértékei komplexek is lehetnek, szemiiterációtól további javítás nem várható.

$\bar{\mu} = S(B) < 1$ esetben, ha $\bar{\mu}$ értékére tudunk becslést adni,

akkor $\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$ faktorról végrehajtott SOR módszerrel

lényegesen gyorsítható a konvergencia, sebessége jobb a J-SI módszernél is.

Ha A A -tulajdonságu, akkor sorainak és oszlopainak átrendezésével konzisztensen rendezett mátrixot kaphatunk. Ilyen mátrixra a SOR jól alkalmazható.

Ha A A^H -tulajdonságu, akkor az MSOR, CCSI, GS-SSI módszer használata előnyös. Egyszerűsége miatt ebben az esetben a SHELDON módszer a legszimpatikusabb.

Young azt javasolta, hogy mielőtt egy módszert kiválasztanánk, számoljunk egy iterációt GS-módszerrel. Ha $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$

alakú, ahol D_1, D_2 négyzetes diagonál mátrixok, hajtsunk végre egy SOR iterációt $\omega = \omega_b$ gyorsító tényezővel. Ekkor a kapott módszernek /ami végeredményben a Sheldon módszer/ kisebb a $D_2^{\frac{1}{2}}$ normája, mint a SOR módszernek. Az $A^{\frac{1}{2}}$ normája viszont mind a két módszernek majdnem ugyanakkora. Azt is be lehet látni, hogy ha GS iterációval kezdünk és GS-SI-vel folytatjuk, akkor az eredmény egy olyan módszer /GS-SSI/, amelynek lényegesen jobb norma-tulajdonságai vannak, mint a GS-SI módszernek.

Elliptikus differenciálegyenletekből kapott rendszerre előnyösen lehet használni az SSOR szemi-iteratív módszerrel való kombinációját. Azonban ilyenkor az $A = \begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}$ rendezés

helyett a természetes rendezést kell használni.

$$\omega_1 = \frac{2}{1+(1-2\mu+1)^{\frac{1}{2}}} \text{-gyel és esetleg néhány valamivel nagyobb}$$

értékkel iterálva egy olyan problémára, amelynek a határfeltétele nulla és konstans a kezdeti értéke, $S(\rho_\omega)$ becsülhető. Ha $S(\rho_\omega)$ kicsi, akkor érdemes szemi-iterációval próbálkozni. Ezt a vizsgálatot vonal SSOR-ra és pont SSOR-ra is célszerű végrehajtani.

Diszkrét Dirichlet problémára a felsorolt módszerek közül a PR módszer konvergál a leggyorsabban, a konvergenciához szükséges iterációszám PR módszernél: $O(1/\log h)$ /ahol h a rácstávolság/

J és GS módszernél: $O(h^{-2})$

SOR módszernél: $O(h^{-1})$, ha A pozitív definit, konzisztensen rendezett, vagy Stieltjes mátrix

Richardson módszernél: $O(h^{-1})$, ha A pozitív definit,

SSOR-nál pedig: $O(h^{-\frac{1}{2}})$

Sajnos, azoknak a feladatoknak az osztálya, ahol a PR módszer elméletileg bebizonyíthatóan konvergens, elég korlátozott.

Ha elég kicsi a rácstávolság, akkor a PR helyett a SOR módszer lehet ajánlani, mivel kevesebb időt és kisebb memóriakapacitást igényel. Ha a mátrix pozitív definit, a Richardson módszer egy nagyságrenddel gyorsabb, mint a GS, viszont bonyolult, munkaigényes és a kerekítési hibák nagyon megnőnek. A Richardson módszernél tehát a SOR módszer gyorsabb és egyszerűbb is.

Sajnos néhány speciális esettől eltekintve nincs olyan szisztematikus eljárás, amely előre megmondaná, hogy az alkalmazott módszer a leghatékonyabb-e. Nyilvánvalóan még jelentős kutatások szükségesek ahhoz, hogy ezeknek a fontos módszereknek szilárd elméleti alapját megadjuk.

P É L D A

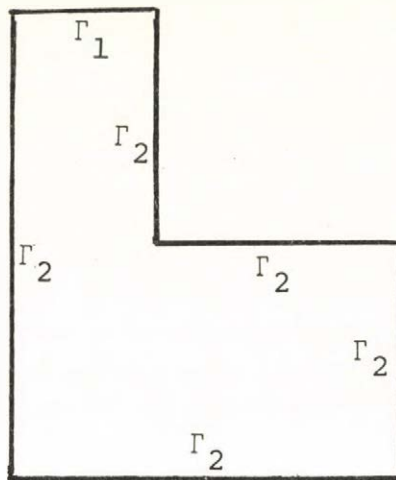
A mágneses terek szimulációja csoport a villamos gépek tervezésében alapvető szerepet játszó horonyszórási impedanciák meghatározásával foglalkozott. Ennek során vizsgáltuk kiöntött hornyu aszinkron gép horonyszórási impedanciáját, amely a gép mágneses köre és így a műszaki paraméterek /fordulatszám, nyomaték/ szempontjából a gép fontos jellemzője.

A horonyimpedancia meghatározásához a horony elektromágneses és áramlási terét kell pontosan ismerni, amelyet a bonyolult geometriai feltételek és anyaginhomogenitások miatt igen nehéz számolni. Munkánkban az elrendezésre vonatkozó elektromágneses Maxwell egyenleteket oldottuk meg numerikus módszerekkel, miközben a valóságos geometriát vettük alapul. Így a kvázistacionárius esetre érvényes Maxwell egyenletekből a tárgyalt esetben

$$\vec{E} = i \cdot p \cdot \vec{E}$$

adódott, ahol \vec{E} a villamos térerősség, amely longitudinális irányu és komplex mennyiség, $p = \omega \mu \gamma$, ahol ω a körfrekvencia, μ mágneses permeabilitás, és γ a villamos vezetőképesség. A feladatot a következő peremfeltétel mellett akaruk megoldani:

$$\operatorname{Re} \vec{E} = 1, \quad \operatorname{Im} \vec{E} = 0$$



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \Gamma_1^{-n} \operatorname{Re} \vec{E} = 1, \quad \operatorname{Im} \vec{E} = 0$$

$$\Gamma_2^{-n} \frac{\partial \operatorname{Re} \vec{E}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} \vec{E}}{\partial \vec{n}} = 0$$

ahol \vec{n} a Γ_2 felület normálvektora.

$E = u + iv$ jelölést bevezetve egyenletünk két részre bontható:

$$\Delta u = p v \quad u|_{\Gamma_1} = 1; \quad v|_{\Gamma_1} = 0$$

$$\Delta v = -p u \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$$

Ebből $v = \frac{1}{p} \Delta u$, így

$$\Delta \Delta u = -p^2 u$$

egyenletet kapjuk a megoldás valós részére.

A peremfeltételek:

$$u|_{\Gamma_1} = 1; \quad \Delta u|_{\Gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0; \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$$

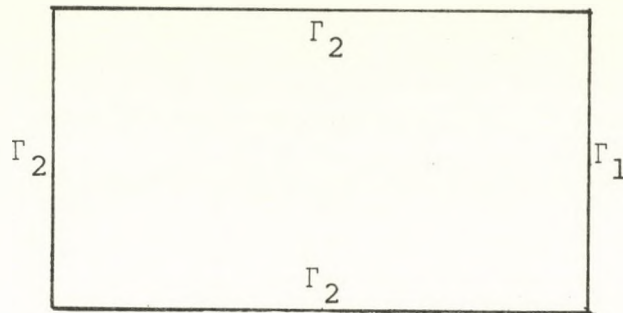
Fedjük be h rácstávolságu hálóval a tartományt és öt pontos differenciálsémát használva diszkretizáljuk a $\Delta \Delta u = -p^2 u$ biharmonikus egyenletet. Így egy lineáris egyenletrendszert kapunk.

Az előző fejezet összefoglalásából kitűnik, hogy a szakirodalom a SOR módszert ajánlja leginkább differenciálegyenletekből származó nagyméretű lineáris egyenlerendszerek megoldására, mivel a lehetőségekhez képest kis memóriaterületet használ és elég gyors módszer.

Feladatunkban sajnos a diszkretizálás során keletkező mátrix nem A tulajdonságu, de a tapasztalat azt mutatta, hogy kb. másfélszer gyorsabb még így is a SOR a GS módszernél.

Hogy becslést kapjunk arra, hogy iterációval jutunk elég közel a megoldáshoz, először ezt a feladatot téglalap tartományon oldottuk meg. Mivel ilyen esetben analitikus megoldás is ismert, könnyű volt a megfelelő iterációszámot meghatározni az áramsűrűség komplex vektorának a horony tengelében létrejövő változást figyelve. Ez az "előkészítő" iterációszámvizsgálat végeredményben alapja lehet minden olyan becslésnek, ami téglalaptól különböző tartományra végrehajtott iterációk számát hivatott megállapítani. Végző célunk az, hogy különböző tartományokon oldjuk meg az egyenletet, aminek alapján kiválasztható az a horonyalakzat, amely leggazdaságosabb adott frekvencia- és anyagparaméter esetén.

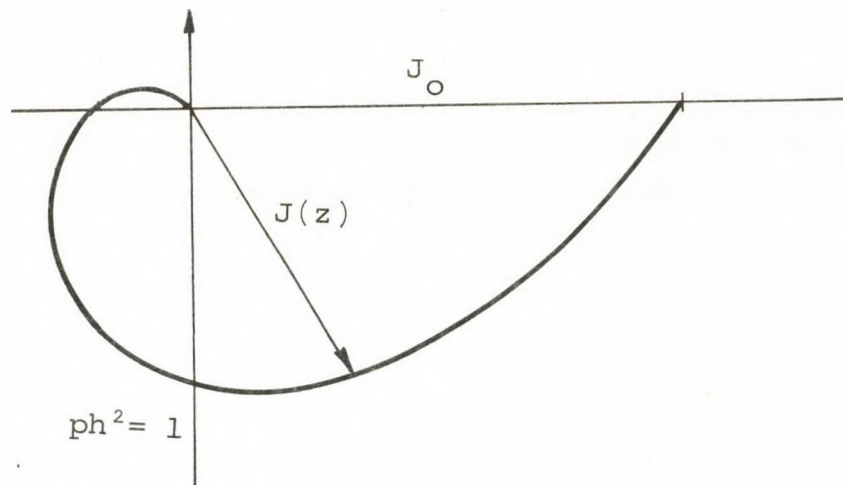
Tekintsük tehát először a biharmonikus egyenlet megoldását téglalap tartományon. A peremfeltételek az ábrán láthatók:



$$\Gamma_{1-n} \quad \operatorname{Re} \vec{E} = 1, \quad \operatorname{Im} \vec{E} = 0$$

$$\Gamma_{2-n} \quad \frac{\partial \operatorname{Re} \vec{E}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} E}{\partial n} = 0$$

Az áramsűrűség komplex vektorának a horony tengelyében létrejövő változása a következő ábrán látható:

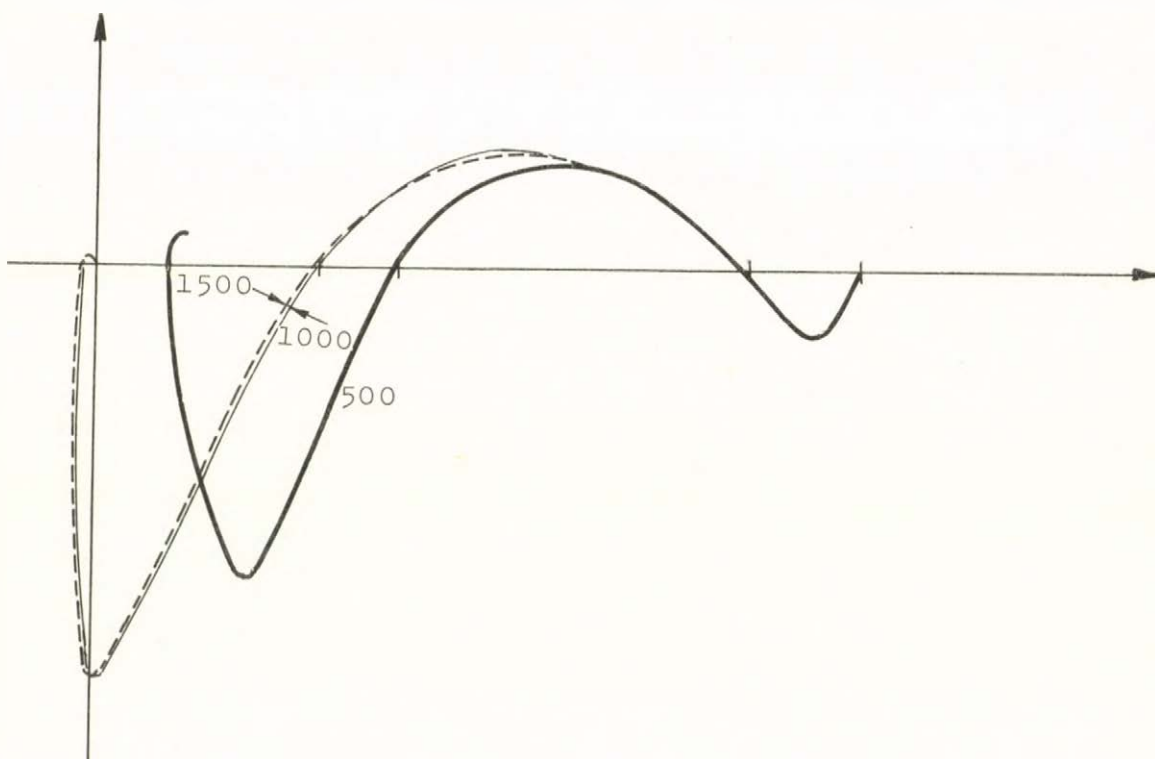


Analitikus képlete: $\frac{J}{J_0} = J_0 \cdot \frac{\operatorname{ch} p(h-z)}{\operatorname{ch} p \cdot h}$

Míg GS módszerrel 1700, iteráció kellett ahhoz, hogy ezt az ábrát kapjuk, SOR módszerrel viszont csak 1000. / A SOR módszert úgy alkalmaztuk, hogy először 20 GS iterációt elvégeztünk, a mátrix legnagyobb sajátértékének ($\bar{\mu}$ -nek) meghatározásához, majd a $\omega_b = \frac{2}{1+(1-\bar{\mu})^{\frac{1}{2}}}$ képletből kiszá-

moltuk ω_b -t. Ez a képlet, mint tudjuk, pontos $\bar{\mu}$ esetén is csak akkor adná az optimális ω -t, ha a mátrix pozitív definit, konzisztensen rendezett lenne. Mivel ez nálunk nem teljesül, érthető a magas iterációszám./

Az előző számítás alapján úgy döntöttünk, hogy az eredeti probléma megoldásához kb. 1500 iterációval elég közel jutunk. 500-anként kirajzoltuk az iteráció eredményét. Ez látható az alábbi ábrán.



IRODALOMJEGYZÉK

- 1 R.J.ARMS.L.D.Gates, B. Zondek: A method of block iteration
- 2 Axelsson: A generalized SSOR method, BIT 13/1972/,443-467
- 3 P.H.Brazier: Anoptimum SOR procedure ... Computer Meth. in Appl. M Mech. and Engineering 3/1974/ 335-347.
- 4 M. Engeli: Overrelaxation and Related Methods, Mitt. Inst. angew. Math. ETH Zürich Nr. 8, Basel und Stuttgart Basel und Stuttgart 1959.
- 5 G.E. Forsythe: Solving Dinear Algebraic Ecuations ... Bull. AM. Math. Soc. 59, 1953.
- 6 M.M. Gupta: Numerical Solution of a Second Biharmonic Boundary Value problem BIT.13 /1973/ 160-164.
- 7 Hadjidimos: The Numerical Solution of a Model Problem Biharmonic Equation ... Num. Math. 17, 1971, 301-317.
- 8 L.A.Hageman, R.B. Kellogg: Estimating Optimum Overrelaxation Parameters Math. Comp. 22, 60-68; 211.
- 9 K.R.James, W. Riha: Convergence Criteria for SOR, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 12, No. 2, 1975.
- 10 H.B.Keller: On some iterative methods for solving elliptic difference equations, Quarterly of Appl.Math. Math. XVI, oct. 1958.
- 11 D.R. Kincaid: On complex second-degree iterativ meth. SIAM J. Numer Anal. Vol.11.No.2.1974.
- 12 J.K. Reid: The use of conjugate gradients for systems of linear equations possessing "property"A SIAM J. Numer. Anal. Vol.9. No. 2. 1972.

- 13 J.K. Reid: A method for finding the optimum successive overrelaxation parameter, Comput. J., V.9, 1966, pp. 200-204.
- 14 A. Ruhe: SOR-Methods for the Eigenvalue Problem with Large Sparse Matrices Mathematics of Computation, Vol.28, 1974, 695-710.
- 15 J. Smith: On the Approximate Solution of the First Boundary Value Problem for $\nabla^4 u = f^x$. SIAM.J. Numer Anal. Vol.10, No.6, December 1973.
- 16 D.M. Young: On the accelerated SSOR Method for Solving Elliptic Boundary Value Problems, Conf. on Numerical Solution of Differential Equations Dundee, Scotland July, 1973.
- 17 D.M. Young: The Modified Successive Overrelaxation Method With Fixed Parameters, Mathematics of Computation Vol.26, Number 119, July, 1972.
- 18 D.M. Young: Generalizations of Property A and Consistent Ordering SIAM J. Numer.Anal.Vol.9.No.3. September 1972
- 19 D.M. Young: Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press 1971.
- 20 D.M. Young, -D.R. Kincaid: The Modified Successive Overrelaxation Method with Fixed Parameters. Math. of Comp. Vol. 26, 1972.
- 21 L.W. Ehrlich - Silver Spring: Point and Block SOR Applied to a Coupled Set of Difference Equations, Computing 12, 181-194 /1974/
- 22 M.A. Malcolm - J. Palmer: A Fast for Solving a Class of Triadiagonal Linear Systems, Communications of the ACM, January 1974.

- 23 B.A. Carre: The determination of the optimum accelerating factor for successive overrelaxation, Comput,J., v.4, 1961, pp. 73-78.
- 24 B. Kredell: On complex successive overrelaxation, BIT 2 /1962/

A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjelentek:

- 1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ vagy $\{\text{NOR}\}$ vagy $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli, zárójeles vagy zárójel nélküli formuláinak előállítására
- 2/1973 Вашкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительных машин
- 3/1973 Ádám György: A számítógépipar helyzete 1972 második felében
- 4/1973 Bányász Csilla: Identification in the Presence of Drift
- 5/1973^x Gyürki J.-Laufer J.-Girnt M.-Somló J.: Optimalizáló adaptív szerszámgepirányítási rendszerek
- 6/1973 Szelke E.-Tóth K.: Felhasználói Kézikönyv /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez
- 7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor
- 8/1973 Klafszy Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása
- 9/1973 R. Narasimhan: Picture Processing Using Pax
- 10/1973 Dibuz Á.-Gáspár J.-Várszegi S.: MANU-WRAP hátlaphuza-
lozó, MSI-TESTER integrált áramköröket mérő, TESTOMAT-C
logikai hálózatokat vizsgáló berendezések ismertetése
- 11/1973 Matolcsi Tamás: Az optimum-számítás egy új módszeréről
- 12/1973 Makroprocesszorok, programozási nyelvek. Cikkgyűjtemény
az NJSzT és SzTAKI közös kiadásában.
Szerkesztette: Legendi Tamás
- 13/1973 Jedlovsky Pál: Új módszer bonyolult rektifikáló oszlopok vegyész-mérnöki számítására
- 14/1973 Bakó András: MTA kutatóintézeteinek bérszámfejtése számítógéppel

- 15/1973 Ádám György: Kelet-nyugati kapcsolatok a számítógépiparban
- 16/1973 Fidrich I.-Uzsoky M.: LIDI-72 listakezelő rendszer a Digitális Osztályon, 1972.évi változat
- 17/1974 Gyürki József: Adaptív termelésprogramozó rendszer /APS/ termelőműhelyek irányítására
- 18/1974 Pikler Gyula: MINI-számítógépes interaktív alkatrész-programíró rendszer NC szerszámgépek automatikus programozásához
- 19/1974 Gertler, J.-Sedlak, J.: Software for process control
- 20/1974 Vámos, T.-Vassy, Z.: Industrial Pattern Recognition Experiment - A Syntax Aided Approach
- 21/1974 A KGST I.-15-1.: "Diszkrét rendszerek automatikus vezérlése" c. témában 1973. februárban rendezett szeminárium előadásai
- 22/1974 Arató, M.-Benczur, A.-Krámli, A.-Pergel, J.: Stochastic Processes, Part I.
- 23/1974 Benkó S.-Renner G.: Erősen telített mágneses körök számítógépes tervezési módszere
- 24/1974 Kovács György-Franta Lászlóné: Programcsomag elektronikus berendezések hátlaphuzalozásának tervezésére
- 25/1974 Járdán R. Kálmán: Háromfázisu tirisztoros inverterek állandósult tranziens jelenségei és belső impedanciája
- 26/1974 Gergely József: Numerikus módszerek sparse mátrixokra
- 27/1974 Somló János: Analitikus optimalizálás
- 28/1974 Vámos Tibor: Tárgyfelismerési kísérlet nyelvi módszerekkel
- 29/1974 Móricz Péter: Vegyészmérnöki számítási módszerek fázisegyensúlyok és kémiai egyensúlyok vizsgálatára

- 30/1974 Vassy, Z.-Vámos, T.: The Budapest Robot - Pragmatic Intelligence
- 31/1975 Nagy István: Frekvenciaosztásos középfrekvenciás inverterek elmélete
- 32/1975 Singer D., Borossay Gy., Koltai T.: Gázhálózatok optimális irányítása különös tekintettel a Fővárosi Gáz-művek hálózataira
- 33/1975 Vámos, T.-Vassy, Z.: Limited and Pragmatic Robot Intelligence
Mérő, L.-Vassy, Z.: A Simplified and Fastened Version of the Hueckel Operator for Finding Optimal Edges in Pictures
Галло В.: Программа для распознавания геометрических образов, основанная на лингвистическом методе описания и анализа геометрических структур
- 34/1975 László Nemes: Pattern Identification Method for Industrial Robots by Extracting the Main Features of Objects
- 35/1975 Garádi-Krámli-Ratkó-Ruda: Statisztikai és számítástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditás vizsgálatokban
- 36/1975 Renner Gábor: Elektromágneses tér számítása nagyhőmérsékletű anyagban
- 37/1975 Edgardo Felipe: Specification problems of a process control display
- 38/1975 Hajnal Andrásné: Nemlineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei
- 39/1975^{*} A. Abd El-Sattar: Control of induction motor by three phase thyristor connections in the secondary circuit
- 40/1975 Gerhardt Géza: QDP Grafikus interaktív szubrutinok a CDC 3300-GD'71 grafikus konfigurációra

- 41/1975 Arató M.-Benczur A.-Krámli A.-Pergel J.:
Stochastic Processes, Part II.
- 42/1975 Arató Mátyás: Fejezetek a matematikai statisztikából
számítógépes alkalmazásokkal
- 43/1975 Matavovszky Tibor - dr Pásztorné Varga Katalin:
Programrendszer Boole-függvényrendszer együttes egy-
szerűsítésére vagy minimalizálására
- 44/1975 Bacsó Nándorné: Pneumatikus áramköri hazardok
- 45/1975 Varga András: Ellenpárhuzamos félvezetőpárokkal vezé-
relt aszinkronmotoros hajtások számítási módszerei
- 46/1976 Galántai Aurél: Egylépéses módszerek lokális hibabecs-
lései
- 47/1976 Abaffy József: A feltétel nélküli függvényminimalizá-
lás kvadratikus befejezésű módszerei
- 48/1976 Strehó Mária: Stiff típusu közönséges differenciál-
egyenletek megoldásáról
- 49/1976 Gerencsér László: Nemlineáris programozási feladatok
megoldása szekvenciális módszerekkel
- 50/1976 Treer Róbert: A syntax macro definition language
- 51/1976 Bakó András: TIMER időredukciós programcsomag
- 52/1976 W.A. Potas: Computer Aided Design
- 53/1976 Farkas Ernő: MP Φ .2 makroprocesszor általános ismer-
tetése
- 54/1976 N.N. Puri: Multi Element Fault Isolation in Electronic
Circuits
- 55/1976 Edgardo Felipe: The Design of color, Raster-Scan
graphical displays for process control applications

